

فصل اول: تابع

- ۱ تعریف تابع (دهم)
- ۱ دامنه توابع (دهم)
- ۱ تبدیل نمودار توابع
- ۴ ترکیب توابع
- ۷ انواع تابع

فصل دوم: مثلثات

- ۸ روابط مثلثاتی
- ۸ دوره تناوب و کاربرد آن
- ۱۱ معادلات مثلثاتی (دوازدهم)

فصل سوم: حد

- ۱۲ بخش پذیری (دوازدهم)
- ۱۲ همسایگی (یازدهم)
- ۱۳ قضایای حد راست و حد چپ و محاسبه حد از روی نمودار (یازدهم)
- ۱۴ رفع ابهام از 0/0
- ۱۵ حد بی نهایت (دوازدهم)
- ۱۹ حد در بی نهایت و رفع ابهام از ∞/∞ (دوازدهم)

- ۲۰ آزمونک تابع

فصل اول: تابع

تعریف تابع (دهم)

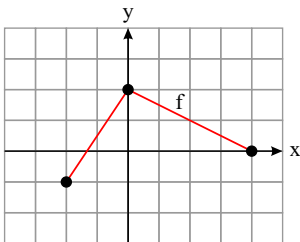
- ۱ کوتاه پاسخ دهید. ۱۳۹۸
- الف) درجه تابع $f(x) = x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید. ۱۳۹۸
- ب) در فاصله $[0, 1]$ از بین دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ ، نمودار کدام تابع پایین تر قرار دارد؟ ۱۳۹۸
- پ) نمودار تابع $y = -f(x)$ ، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟ ۱۳۹۸
- ت) تابع $h(x) = |x+2|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟ ۱۳۹۸

دامنه توابع (دهم)

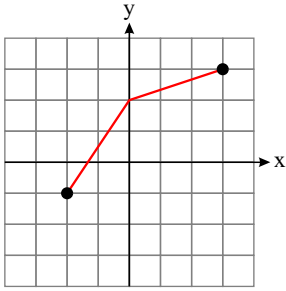
- ۲ درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید. ۱۳۹۸
- الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. ۱۳۹۸
- ب) نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ در دامنه تابع تانژانت قرار ندارند. ۱۳۹۸
- پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر $-\infty$ است. ۱۳۹۸
- ۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۸
- الف) تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است. ۱۳۹۸
- ب) دامنه تابع $y = \tan x$ برابر $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ است. ۱۳۹۸

تبدیل نمودار توابع

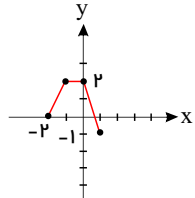
- ۴ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(2x)$ را رسم سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. ۱۳۹۸



۱۳۹۸

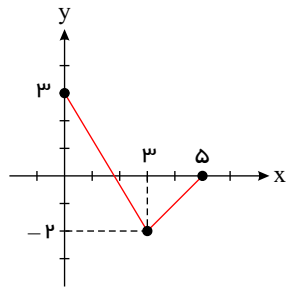


۵ با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را رسم کنید.



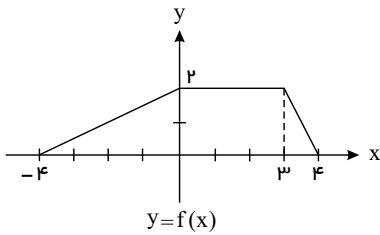
۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۳۹۸



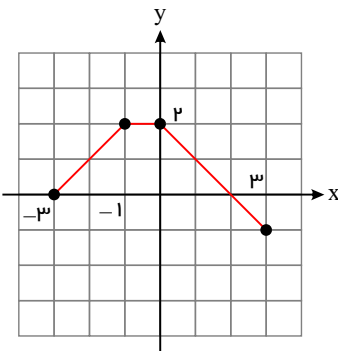
۷ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3 - x)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.

۱۳۹۸



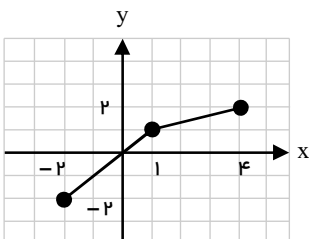
۸ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار $y = \frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.

۱۳۹۹



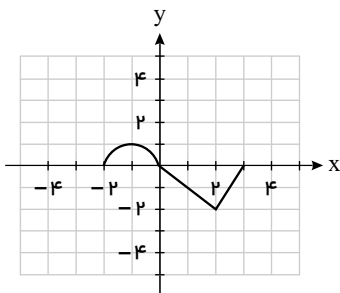
۹ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۳۹۹

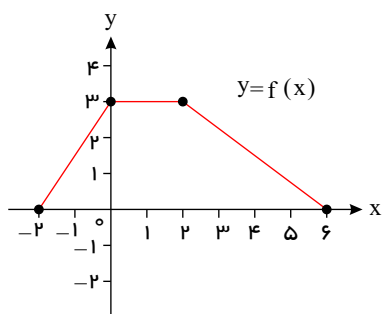


۱۰ با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۳۹۹

۱۱) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.الف) نمودار تابع $y = 3f\left(\frac{1}{4}x\right)$ را رسم کنید.ب) دامنه تابع $y = 3f\left(\frac{1}{4}x\right)$ را تعیین کنید.

۱۳۹۹

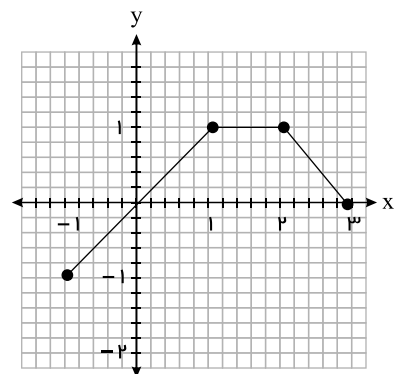
۱۲) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.

۱۳۹۹

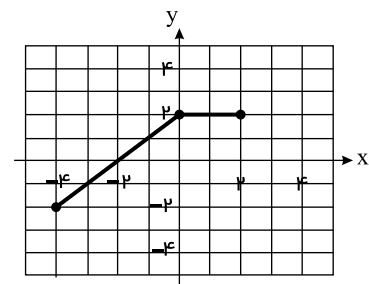
۱۳) نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

$$y = \cos 2x - 1$$

۱۴۰۰

۱۴) نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.

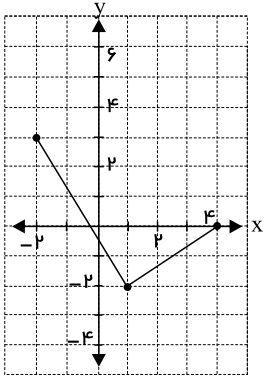
۱۴۰۰

۱۵) با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.

۱۴۰۰

۱۶) نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۱۴۰۱

۱۷) نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است:الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید.ب) دامنه تابع g را به دست آورید.

۱۴۰۲

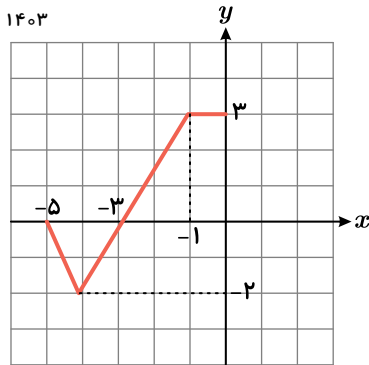
۱۸) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $[0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ را بیابید.۱۹) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

۱۴۰۰

۲۰) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.

۱۴۰۲

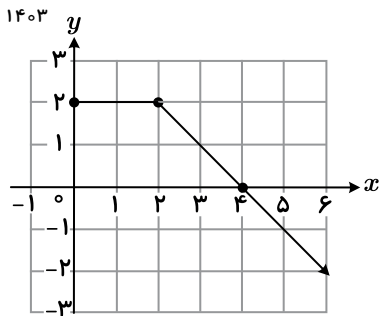
۱۴۰۳

۲۱) نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.

۱۴۰۳

۲۲) به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را رسم کنید.

۱۴۰۳

۲۳) در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است.

۱۴۰۳

الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید.

۱۴۰۳

ب) مقدار $g \circ f(0)$ را به دست آورید.

ترکیب توابع

۱۳۹۸

۲۴) در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۱۳۹۸

الف) تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots\dots\dots$ است.

۱۳۹۸

ب حد تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

۱۳۹۸

۲۵ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه تابع $f \circ g(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۳۹۸

۲۶ دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۳۹۹

۲۷ اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد.

۱۳۹۹

الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۳۹۹

ب با محدود کردن دامنه تابع f تابعی وارون پذیر بسازید.

۱۳۹۹

۲۸ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۱۳۹۹

۲۹ اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد،

۱۳۹۹

الف دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۳۹۹

ب مقدار $\frac{f}{g}(0) - g \circ f(2)$ را تعیین کنید.

۱۳۹۹

۳۰ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد،

۱۳۹۹

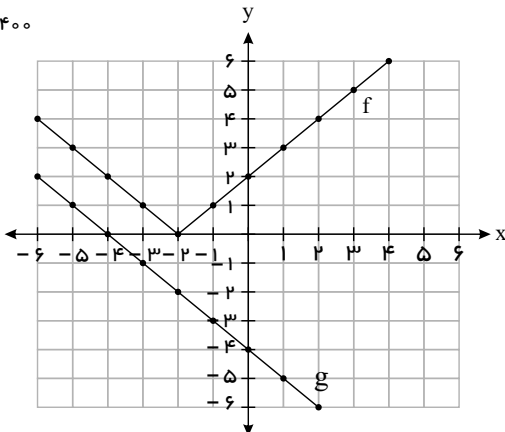
الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۳۹۹

ب ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.

۱۴۰۰

۳۱ با توجه به نمودارهای تابع f و g به سوالات زیر پاسخ دهید:



۱۴۰۰

الف مقدار $f \circ g(-1)$ را محاسبه کنید.

۱۴۰۰

ب اگر $g(3t-1) = 0$ آنگاه مقدار t را به دست آورید.

۱۴۰۰

پ با محدود کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.

۱۴۰۰

۳۲ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد،

الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.

۱۴۰۱

۳۳ اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.

۱۴۰۲

۳۴ اگر $f(x) = 7 - 4x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ باشد:

الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب مقدار $(g \circ f)(1)$ را محاسبه کنید.

۱۴۰۱

۳۵ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱۴۰۱

الف) تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

۱۴۰۱

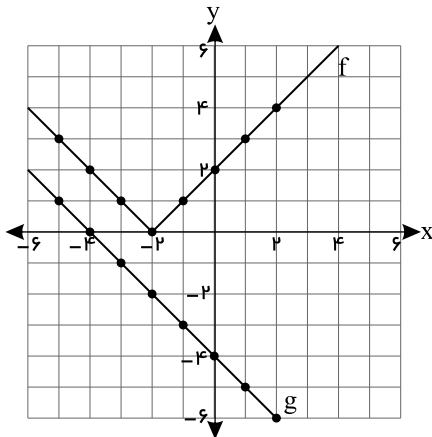
ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(fog)(4) = 5$.

۱۴۰۱

پ) دو تابع $f(x) = -\frac{y}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.

۱۴۰۱

۳۶) با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.



$(gof)(-1)$

۱۴۰۱

الف)

$(g^{-1}of^{-1})(2)$

۱۴۰۱

ب)

۱۴۰۱

پ) نمودار تابع $f(x-2) - 3$ را رسم کنید.

الف) $(gof)(1)$

ب) $(fo(f+g))(0)$

۱۴۰۰

۳۷) با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-1	2	-5
$g(x)$	2	3	4	-2

۱۴۰۲

۳۸) اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x-1$ ، آنگاه:

۱۴۰۲

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۴۰۲

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

۱۴۰۳

۳۹) جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

۱۴۰۳

الف) اگر $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ ، مقدار $(fof)(1)$ برابر است.

۱۴۰۳

ب) اگر α یک زاویه حاده و $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ ، حاصل $\cos 2\alpha$ برابر است.

۱۴۰۳

پ) بازه $(-2, 0)$ ، یک همسایگی چپ برای عدد است.

۱۴۰۳

۴۰) اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشند آنگاه D_{fog} را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱۴۰۱

۴۱) اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟

خروجی $x \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow$ ورودی

- ۱۴۰۲ ۴۲ اگر $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.
- ۱۳۹۸ ۴۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۸ الف تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود.
- ۱۳۹۸ ۴۴ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید.
- 
- ۱۳۹۹ ۴۵ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- ۱۳۹۹ الف تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود، تابع نامیده می شود.
- ۱۳۹۹ ب دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.
- انواع تابع
- ۱۳۹۸ ۴۶ نمودار تابع $f(x) = (x+1)^3$ را رسم کنید. این تابع در دامنه خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟
- ۱۳۹۸ ۴۷ اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید.
- ۱۴۰۰ ۴۸ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.
- ۱۴۰۰ ۴۹ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.
- ۱۴۰۰ الف تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \geq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.
- ۱۴۰۰ ۵۰ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟
- ۱۴۰۰ ۵۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۰ الف دامنه توابع چندجمله‌ای برابر \mathbb{R} است.
- ۱۴۰۰ ب دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ وارون یکدیگرند.
- ۱۴۰۰ پ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.
- ۱۴۰۲ ۵۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۲ الف تابع $y = \sqrt[3]{3x^3} - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است.
- ۱۴۰۲ ب تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.
- ۱۴۰۲ پ خط $y = \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می کند.
- ۱۴۰۰ ۵۳ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- ۱۴۰۰ الف در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.
- ۱۴۰۳ ۵۴ نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.
- ۱۳۹۸ ۵۵ الف توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
- ب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g^{-1}(5)$ را به دست آورید.
- ۱۳۹۸ ۵۶ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g^{-1}(5)$ را به دست آورید.
- ۱۳۹۹ ۵۷ نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.
- ۱۳۹۹ ۵۸ ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ را به دست آورید.

- ۱۴۰۰ ۵۹ ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.
- ۱۴۰۲ ۶۰ اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید.
- ۱۴۰۳ ۶۱ ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید.
- ۱۴۰۳ $f(x) = -x^2 - 2, x \geq 0$
- ۱۴۰۳ ۶۲ تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.
- ۱۴۰۳ ۶۳ فرض کنید $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشند. در این صورت $(g \circ f)^{-1}$ را بیابید.

فصل دوم: مثلثات

روابط مثلثاتی

- ۱۳۹۹ ۶۴ مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.
- ۱۴۰۲ ۶۵ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۲ الف) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است.
- ۱۴۰۲ ب) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از، نمودار تابع $y = x^3$ است.
- ۱۴۰۲ پ) هر تابع یکنوا، یک به یک است.
- ۱۴۰۲ ت) مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.
- ۱۴۰۰ ۶۶ حاصل عبارت $\cos 2x \cos x \cos 4x \sin x$ را به ازای $x = 7,5^\circ$ محاسبه کنید.
- ۱۴۰۳ ۶۷ جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.
- ۱۴۰۳ الف) تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.
- ۱۴۰۳ ب) مقدار عددی عبارت $\cos 15^\circ \sin 15^\circ$ برابر است.

دوره تناوب و کاربرد آن

- ۱۴۰۲ ۶۸ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- ۱۴۰۲ الف) دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 3 \sin 2x$ به ترتیب برابر و است.
- ۱۴۰۲ ۶۹ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.
- ۱۴۰۲ $y = \sqrt{3} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
- ۱۳۹۸ ۷۰ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۸ الف) مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 2$ برابر با یک است.
- ب) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.
- ۱۳۹۸ ۷۱ ضابطه تابعی به فرم $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -۳ باشد.
- ۱۳۹۸ ۷۲ الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.
- ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را به دست آورید.
- ۱۳۹۸ ۷۳ دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.
- ۱۳۹۸ ۷۴ الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید.
- ب) معادله مثلثاتی $1 = \cos 2\alpha - \sin \alpha + 1$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.
- ۱۳۹۹ ۷۵ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)
- ۱۳۹۹ $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$

۱۳۹۸ ۷۶ کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

۱۳۹۸ الف تابع تنازانت در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است.

۱۳۹۸ ب نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$ در دامنه تابع تنازانت قرار دارند.

۱۳۹۹ ۷۷ ضابطه تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیم آن ۶ و مقدار مینیم آن -۲ باشد.

۱۳۹۹ ۷۸ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

۱۳۹۹ الف دوره تناوب تابع $y = 8 \cos(\frac{x}{3})$ برابر با است.

۱۳۹۹ ۷۹ مقدار ماکزیم و مینیم تابع $y = 1 + 2 \sin 7x$ را به دست آورید.

۱۳۹۹ ۸۰ دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع زیر را به دست آورید.

۱۳۹۹ $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2}x$

۸۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود).

۱۳۹۹ $y = \pi \sin(-x) + 1$

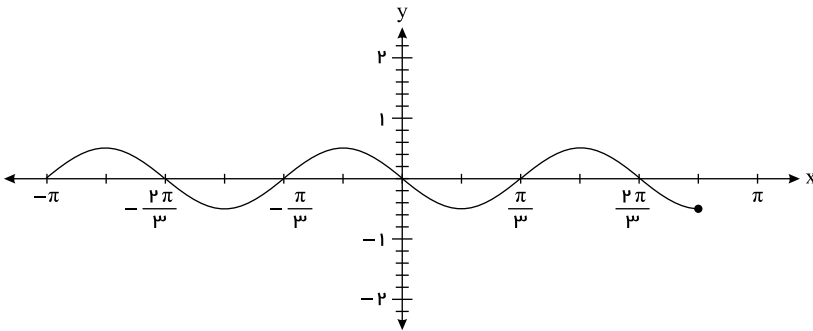
۱۳۹۹ ۸۲ دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{3}x$ را محاسبه کنید.

۱۳۹۹ ۸۳ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۱۴۰۰ دامنه تابع با ضابطه $y = \tan x$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dots\}$ است.

۸۴ در شکل نمودار زیر، با تعیین مقادیر ماکزیم و مینیم تابع، ضابطه آن را بنویسید.

۱۴۰۰

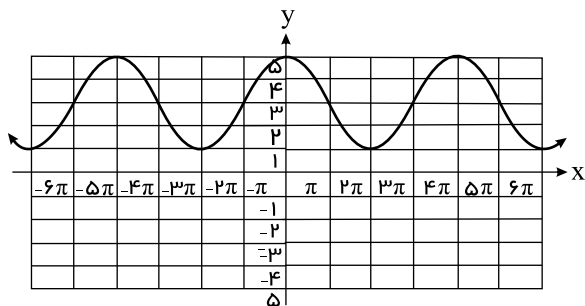


۸۵ الف دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

۱۴۰۰ $y = 8 \cos(\frac{x}{3})$

ب مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

۱۴۰۰ ۸۶ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.

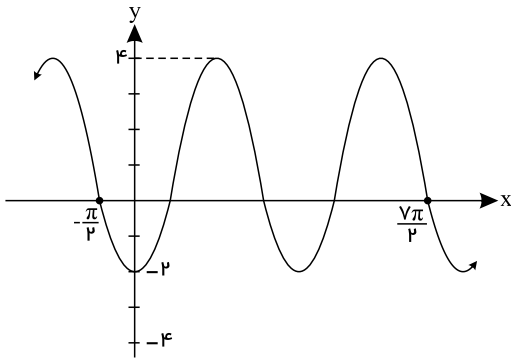


۱۴۰۰ ۸۷ برد تابع تنازانت $(y = \tan x)$ برابر است.

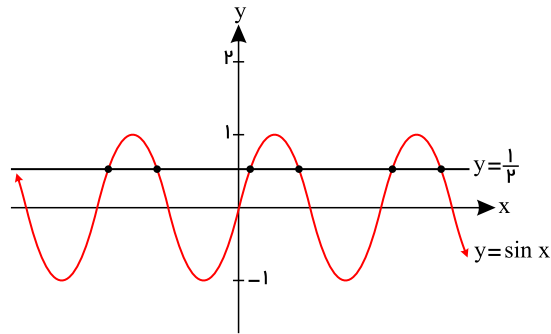
۱۴۰۰ ۸۸ ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیم ۵ و مینیم ۳ را بنویسید.

۱۴۰۱ ۸۹ معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

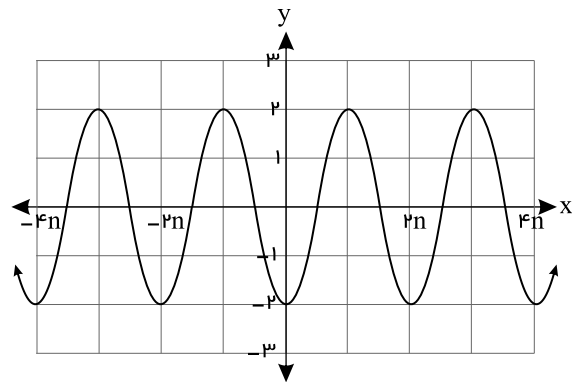
۱۴۰۱ ۹۰ دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = 3 \cos(\pi x) + 2$ را به دست آورید.



۹۱ نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید. ۱۴۰۲



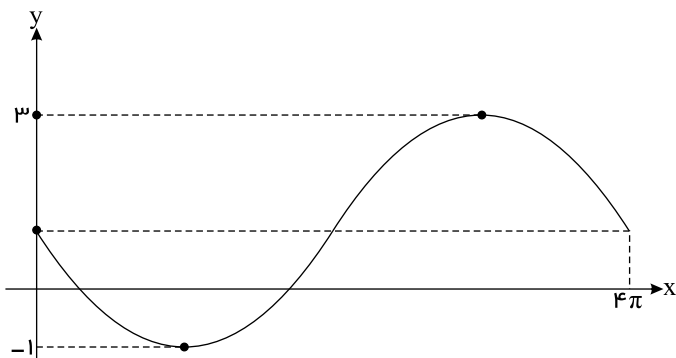
۹۲ نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ و خط به معادله $y = \frac{1}{2}$ در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید. ۱۴۰۲



۹۳ نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید. ۱۴۰۱

۹۴ معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -1 و دوره تناوب آن 8π است. ۱۴۰۰

۹۵ نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + 1$ است. حاصل ab را بیابید. ۱۴۰۲

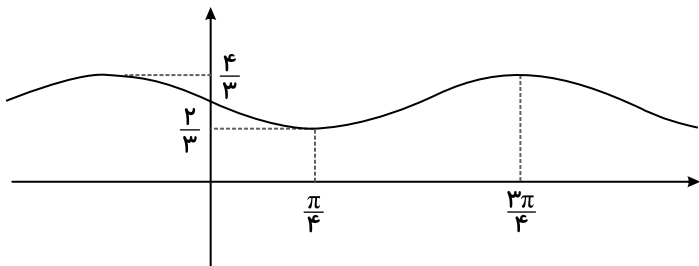


۹۶ مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a \cos \frac{x}{2} + 3$ برابر ۶ می باشد، $|a|$ و دوره تناوب را به دست آورید. ۱۴۰۳

۹۷ اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a \sin(8x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد: ۱۴۰۳

الف مقادیر $|a|$ و c را بیابید. ۱۴۰۳

ب دوره تناوب تابع را به دست آورید. ۱۴۰۳



۹۸ نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را

مشخص کنید.

۱۴۰۳

۹۹ با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه مقادیر $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.

۱۴۰۳

۱۰۰ معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$1403 \cos 2x - 13 \cos x - 6 = 0$$

معادلات مثلثاتی (دوازدهم)

۱۰۱ معادله مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.

۱۳۹۸

۱۰۲ معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

۱۳۹۸

۱۰۳ به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱۳۹۸

الف مقدار $\sin 22.5^\circ$ را به دست آورید.

۱۳۹۸

ب دوره تناوب و مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید.

۱۳۹۸

پ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

۱۳۹۸

۱۰۴ معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

۱۳۹۹

۱۰۵ معادله $2 \cos 3x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

۱۳۹۹

۱۰۶ معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

۱۳۹۹

۱۰۷ معادله مثلثاتی $\cos x(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

۱۳۹۹

۱۰۸ معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

۱۳۹۹

۱۰۹ معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

۱۳۹۹

۱۱۰ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید.

۱۴۰۰

۱۱۱ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

۱۴۰۰

۱۱۲ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

۱۴۰۰

۱۱۳ معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید.

۱۴۰۰

۱۱۴ معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

۱۴۰۱

۱۱۵ معادله زیر را حل کنید.

$$1401 \cos 2x - 3 \sin x + 4 = 0$$

۱۴۰۱

۱۱۶ معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید.

۱۱۷ مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

۱۴۰۰

۱۱۸ جواب(های) معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x = 0$ را در بازه $(0, \pi)$ مشخص کنید.

۱۴۰۲

۱۱۹ معادله مثلثاتی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید.

۱۴۰۲

۱۲۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۴۰۳

الف نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید.

۱۴۰۳

ب فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{2}{5}$ باشد.

۱۴۰۳

پ باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.

۱۴۰۳

۱۲۱ جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ هستند؟

۱۴۰۳

۱۲۲ جواب‌های معادله $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ را در بازه $(0, \pi)$ به دست آورید.

۱۴۰۳

فصل سوم: حد

بخش پذیری (دوازدهم)

۱۲۳ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.

۱۳۹۸

۱۲۴ اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x + 1)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ را به دست آورید.

۱۳۹۸

۱۲۵ چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $(x + 1)$ تجزیه کنید.

۱۳۹۸

۱۲۶ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید.

۱۳۹۸

الف $x^5 + 1$ با عامل $x + 1$

۱۳۹۸

ب $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$

۱۳۹۸

۱۲۷ در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a, b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.

۱۳۹۹

۱۲۸ مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.

۱۳۹۹

۱۲۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۳۹۹

الف چندجمله‌ای $P(x) = (2 - x)^2(x + 1)^3$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است.

۱۳۹۹

ب اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز می‌باشد.

۱۳۹۹

پ مقدار تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{4}$ تعریف نشده است.

۱۳۹۹

۱۳۰ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.

۱۳۹۹

۱۳۱ چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را با عامل $x - 1$ تجزیه کنید.

۱۴۰۰

۱۳۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۴۰۰

الف دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.

۱۴۰۰

ب در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ ، باقیمانده برابر $p(a)$ است.

۱۴۰۰

۱۳۳ باقی‌مانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان است. مقدار a را بیابید.

۱۴۰۰

۱۳۴ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.

۱۴۰۱

الف نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالتر - پایین‌تر)

۱۴۰۱

ب چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله‌ای بخش‌پذیر است. $((x + 1), (x - 1))$

۱۴۰۱

همسایگی (یازدهم)

۱۳۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۴۰۱

الف بازه $(2, 5)$ ، یک همسایگی ۴ است.

۱۴۰۱

قضایای حد راست و حد چپ و محاسبه حد از روی نمودار (یازدهم)

۱۳۹۸

۱۳۶ به سوالات زیر پاسخ دهید.

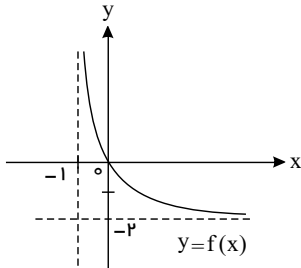
الف

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

۱۳۹۸

۱۳۹۸



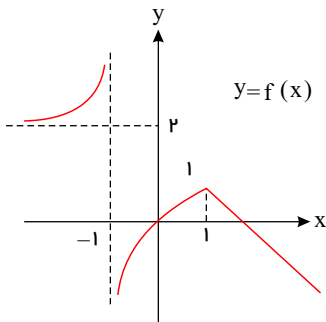
ب با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

۱۳۹۹

۱۳۷ باتوجه به نمودار $y = f(x)$



$$۱۳۹۹ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

الف حدود خواسته شده را بنویسید.

۱۳۹۹

۱۳۸ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$$

۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

۱۳۹۹

۱۴۰۱

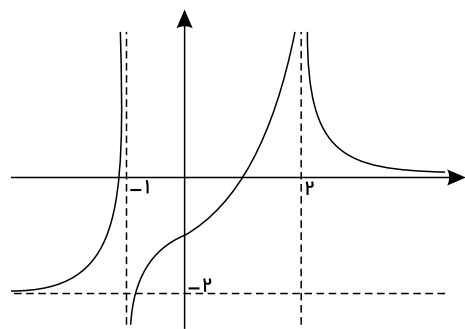
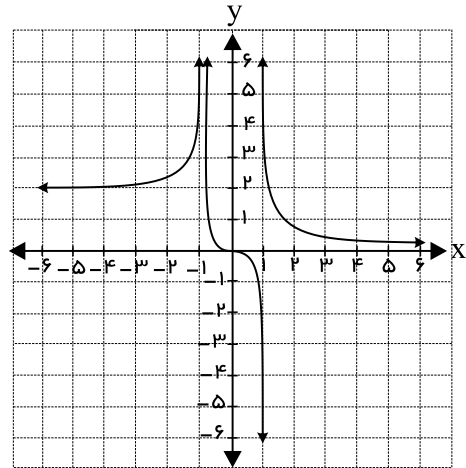
۱۳۹ نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) =$



۱۴۰۲

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

۱۴۰ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.

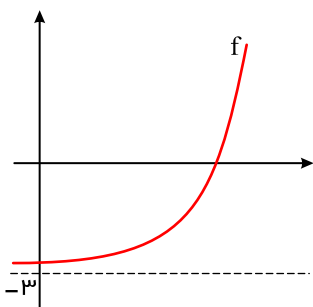
ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

۱۴۰۲

۱۴۱ آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x] - 1}$ وجود دارد؟ چرا؟

۱۴۰۲

۱۴۲ با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$

۱۴۰۳

۱۴۳ حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد \square علامت جزء صحیح است).

۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

۱۴۰۳

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}$

۱۴۰۳

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}$

۱۴۰۳

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

رفع ابهام از ۰/۰

۱۳۹۸

۱۴۴ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$$

۱۳۹۸

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$$

۱۳۹۸

پ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^3 - 4x}$$

۱۳۹۸

حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۴۵

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$$

۱۴۰۱

حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ۱۴۶

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$$

الف) ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

ب)

حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۴۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

۱۴۰۲

حد بی‌نهایت (دوازدهم)

۱۴۸

حدود زیر را به دست آورید.

۱۳۹۸

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{4 - x^2}$$

۱۳۹۸

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-2x^5 + 3x^2 + 3}$$

۱۳۹۸

۱۳۹۸

حد توابع زیر را به دست آورید. ۱۴۹

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

۱۳۹۸

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2}$$

۱۳۹۸

۱۳۹۸

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۵۰

الف

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$$

۱۳۹۹

15

t.me/Alpschool

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|}$$

۱۳۹۹

۱۳۹۹

۱۵۱ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$$

۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{x - 5} - \frac{2}{x} \right)$$

۱۳۹۹

۱۳۹۹

۱۵۲ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$$

۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 + 2x - 1}$$

۱۳۹۹

۱۳۹۹

۱۵۳ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x + 6}}$$

۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

۱۳۹۹

۱۳۹۹

۱۵۴ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x + 1}}$$

۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|}$$

۱۳۹۹

۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$$

۱۳۹۹

۱۴۰۰

۱۵۵ حدهای زیر را محاسبه کنید.



الف

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x] + 1}{x + 1}$$

۱۴۰۰

۱۵۶ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$$

۱۴۰۰

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

۱۴۰۰

۱۵۷ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$$

۱۴۰۰

ب

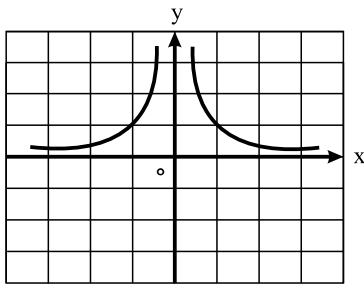
$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x+1|}$$

۱۴۰۰

پ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$$

۱۴۰۰

۱۵۸ با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با

۱۴۰۰

۱۵۹ حد زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{|x-2|}$$

۱۴۰۱

۱۶۰ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

ب

$$۱۴۰۱ \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

پ

$$۱۴۰۱ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{5x+4}$$

۱۴۰۱

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۶۱

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$$

۱۴۰۱

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$$

۱۴۰۱

۱۴۰۰

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۶۲

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

۱۴۰۰

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

۱۴۰۰

پ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

۱۴۰۰

۱۴۰۲

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۶۳

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

۱۴۰۲

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|}$$

۱۴۰۲

پ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x}$$

۱۴۰۲

۱۴۰۲

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ۱۶۴

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|2-x|}$$

۱۴۰۲



ب

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}$$

۱۴۰۲

۱۴۰۳

۱۶۵) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{3}{x^2}}$$

۱۴۰۳

ب

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x}$$

۱۴۰۳

پ

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x+1}}$$

۱۴۰۳

حد در بی‌نهایت و رفع ابهام از ∞/∞ (دوازدهم)

۱۳۹۸

۱۶۶) جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۱۳۹۸

الف) دوره تناوب تابع $y = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{4}x\right)$ برابر با است.

۱۳۹۸

ب) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$ برابر با است.

۱۳۹۸

۱۶۷) در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۱۳۹۸

الف) حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند برابر می‌باشد.

۱۳۹۹

۱۶۸) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱۳۹۹

الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر است.

۱۳۹۹

ب) حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

۱۴۰۲

۱۶۹) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

۱۴۰۲

الف) اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است.

۱۴۰۲

ب) حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2 - 1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند برابر است.

۱۴۰۳

۱۷۰) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2}$$

۱۴۰۳

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2}$$

۱۴۰۳

آزمونک تابع

- ۱۳۹۹ ۱۷۱) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۹ الف) نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.
- ۱۳۹۹ ب) اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.
- ۱۴۰۱ ۱۷۲) سوالات چهارگزینه‌ای:
- ۱۴۰۱ الف) برد تابع f بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ ، کدامیک از موارد زیر است؟
الف) $[-8, 0]$ ب) $[-12, 0]$ پ) $[1, 9]$ ت) $[-10, 2]$
- ۱۴۰۳ ۱۷۳) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۳ الف) در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x - 1}$ دامنه تابع $(f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است.
- ۱۳۹۹ ۱۷۴) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۹ الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.
- ۱۳۹۹ ۱۷۵) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
- ۱۳۹۹ الف) توابع اکیدا یکنوا، همواره هستند.
- ۱۴۰۳ ۱۷۶) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۳ الف) تابع $y = f(x)$ با دامنه \mathbb{R} مفروض است. برد تابعهای $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ یکسان است.
- ۱۴۰۳ ب) تابع $y = \tan x$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.
- ۱۳۹۹ ۱۷۷) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۹ الف) اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیدا نزولی نیز می‌باشد.
- ۱۳۹۹ ۱۷۸) در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.
- ۱۳۹۹ الف) اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x + 1)$ برابر است.
- ۱۳۹۹ ۱۷۹) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۹ الف) دامنه تابع $y = kf(x)$ با ضابطه $y = f(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.
- ۱۳۹۹ ب) برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر بازه $[-1, 1]$ است.
- ۱۴۰۲ ۱۸۰) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۲ الف) بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.
- ۱۳۹۸ ۱۸۱) جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.
- ۱۳۹۸ الف) اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^2 + kx - 1$ بر $(x + 1)$ برابر با ۲ باشد، مقدار k برابر است.
- ۱۳۹۸ ب) دوره تناوب تابع تانژانت برابر با است.

- ۱۳۹۸ ۱۸۲ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۸ الف دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{y}$ و $g(x) = \frac{-y}{2}x - 3$ وارون یکدیگرند.
- ۱۳۹۸ ب دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.
- ۱۴۰۱ ۱۸۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۴۰۱ الف تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است.
- ۱۴۰۱ ب تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ یک تابع درجه دوم است.
- ۱۴۰۱ ۱۸۴ در جاهای خالی عبارات مناسب قرار دهید.
- ۱۴۰۱ الف ضابطه تابع وارون $y = x^3$ برابر است.
- ۱۴۰۱ ۱۸۵ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- ۱۴۰۱ الف باقیمانده تقسیم عبارت $1 - 5x + 2x^2$ بر $x - 3$ برابر است.
- ۱۴۰۱ ب اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.
- ۱۳۹۸ ۱۸۶ در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.
- ۱۳۹۸ الف تابع $y = (x + 1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی، نزولی) است.
- ۱۳۹۹ ۱۸۷ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- ۱۳۹۹ الف برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.
- ۱۳۹۹ ب چند جمله‌ای $10 - 3x - 5x^2 + 2x^3$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.
- ۱۴۰۳ ۱۸۸ هریک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.
- ۱۴۰۳ الف تابع هم صعودی و هم نزولی است.
- ۱۴۰۳ ب در تقسیم چندجمله‌ای $10 - 3x - 5x^2 + 2x^3$ بر $x + 2$ باقی‌مانده تقسیم برابر است.
- ۱۴۰۲ ۱۸۹ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
- ۱۴۰۲ الف اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است.
- ۱۴۰۲ ب نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر است.

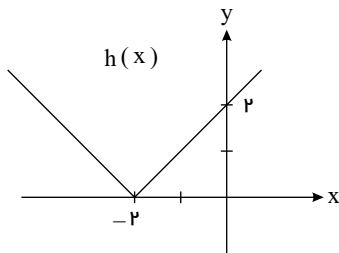
پاسخنامه تشریحی

۱
الف
ب

$$g(x) = x^3$$

پ محور طولها

ت با توجه به شکل $h(x) = |x + 2|$ واضح است که تابع در $[-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



۲

الف نادرست - برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ اگر $k > 1$ باشد، دامنه تابع $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود. (انقباض افقی در راستای محور x ها) و اگر $0 < k < 1$ دامنه تابع $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود (انبساط افقی در راستای محور x ها).

ب درست - دامنه تابع کسری برابر {ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R} است، پس:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \text{مخرج} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

پ درست

هرچه x از سمت راست به ۳ نزدیک‌تر شود، مقادیر x^2 از بالا به ۹ میل خواهد کرد؛ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3^+ + 1}{9 - 9^+} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۳

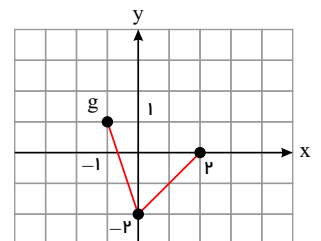
الف نادرست

ب درست

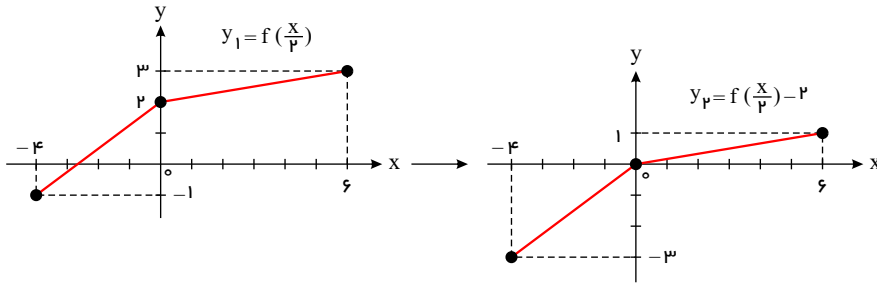
۴ برای رسم نمودار $g(x)$ کافی است طول نقاط را نصف کنیم، سپس نسبت به محور x قرینه کنیم.

$$D_g = [-1, 2]$$

$$R_g = [-2, 1]$$

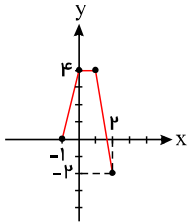


۵ کافی است که طول نقاط را دو برابر کرده و سپس شکل را دو واحد به پایین منتقل کنیم.



۶

برای رسم ابتدا منحنی $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس برد آن را دو برابر می‌کنیم.



$D_g = [-1, 2]$

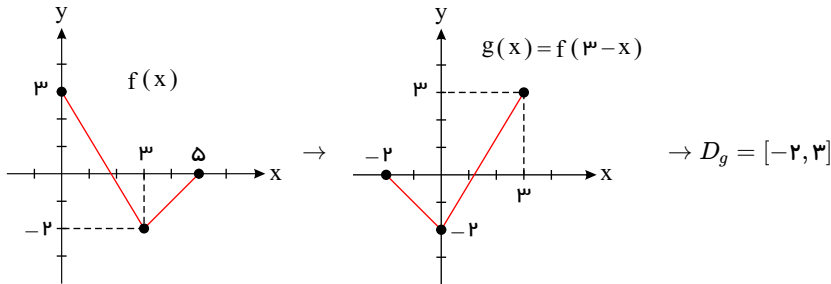
$R_g = [-2, 4]$

۷

برای رسم نمودار $g(x) = f(3-x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ داریم:

$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = f(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow -x} g(x) = f(-x+3) = f(3-x)$

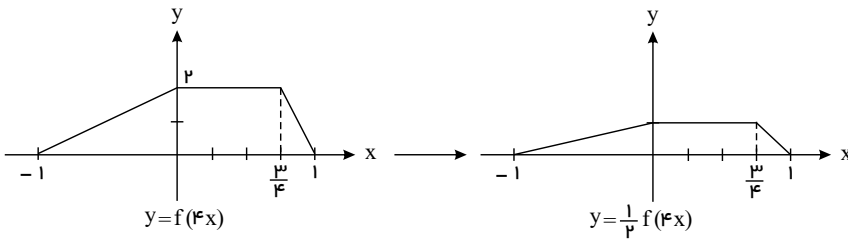
بنابراین باید ابتدا نمودار f را ۳ واحد به چپ منتقل کرده و سپس حاصل را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.



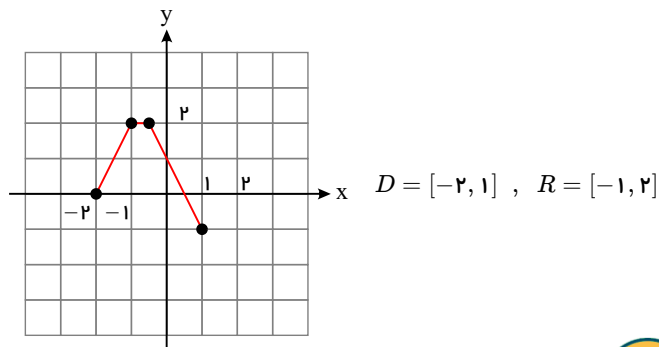
$\rightarrow D_g = [-2, 3]$

۸

کافی است طول نقاط را $\frac{1}{4}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



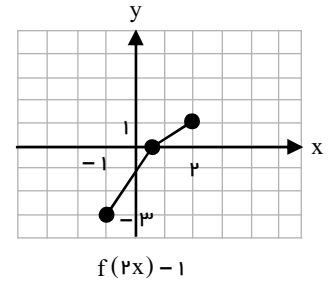
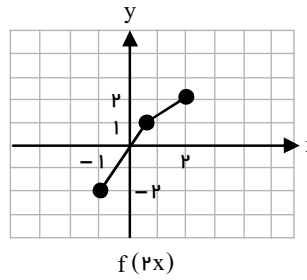
۹



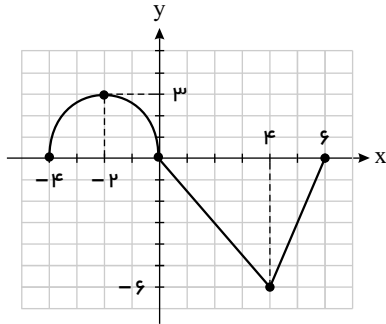
۱۰ با توجه به نمودار دامنه و برد برابر است با:

دامنه: $D_g = [-1, 2]$

برد: $R_g = [-3, 1]$



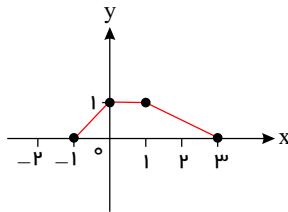
۱۱ الف) کافی است طولها را دو برابر کرده و سپس عرضها را سه برابر کنیم.



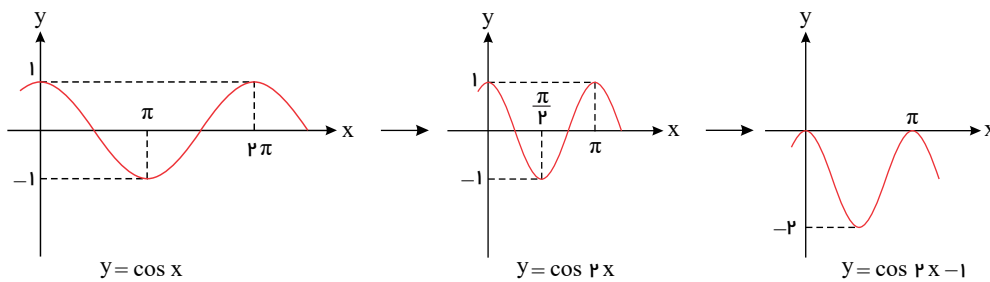
ب) دامنه این تابع $[-4, 6]$ است.

۱۲

کافی است که طولها را نصف کرده و سپس عرضها را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم.

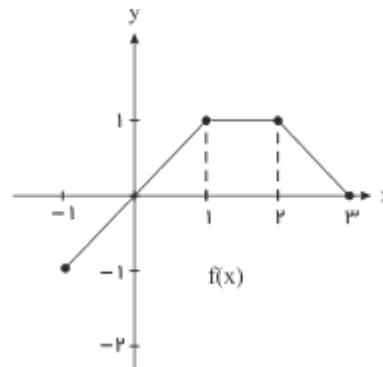


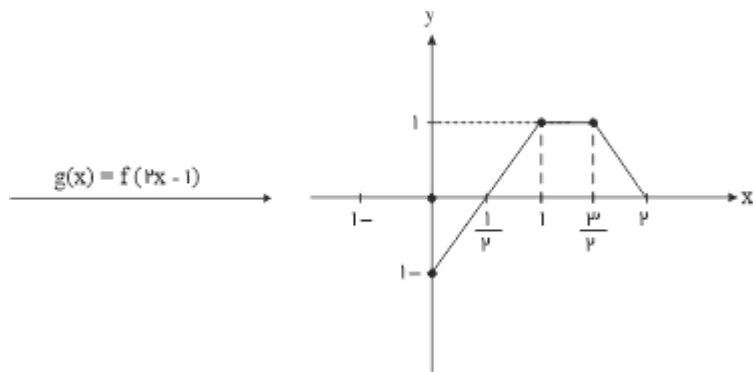
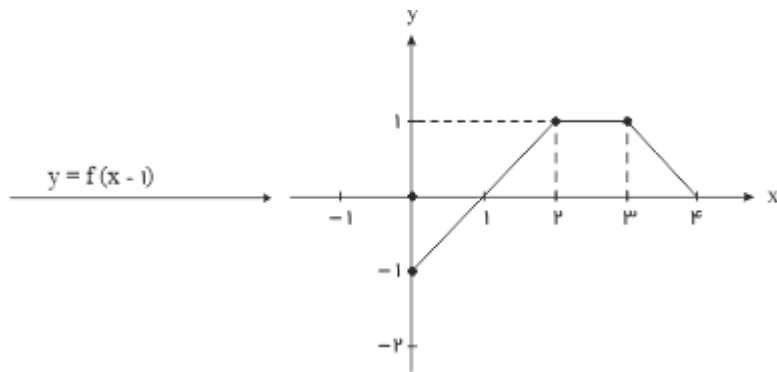
۱۳



۱۴

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} g(x) = f(2x-1)$$

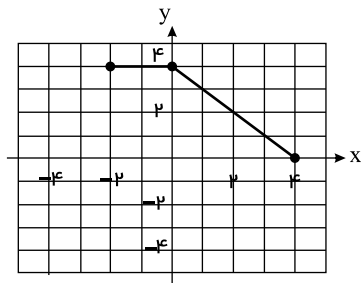




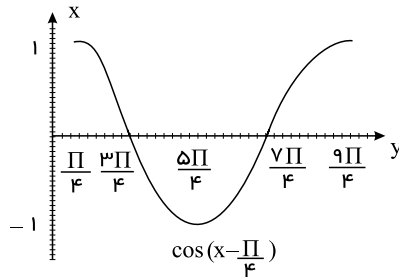
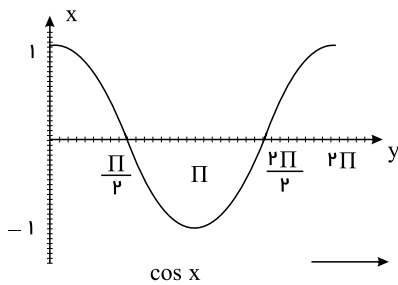
با توجه به نمودار داریم:

$D_g = [0, \psi], R_g = [-1, 1]$

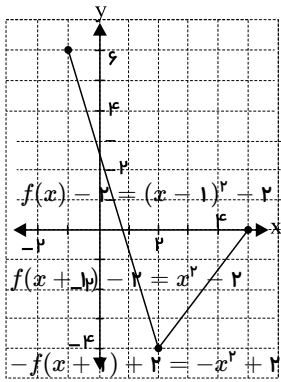
۱۵



۱۶



۱۷ (الف)



مرحله دوم:

مرحله سوم:

۲۰ [-۱, ۵]

۱۸ برد تغییر نمی کند.

۲۱

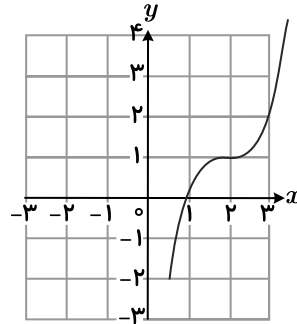
۱۹ مرحله اول:

۲۲

$$y = 2\sqrt{x-3}$$

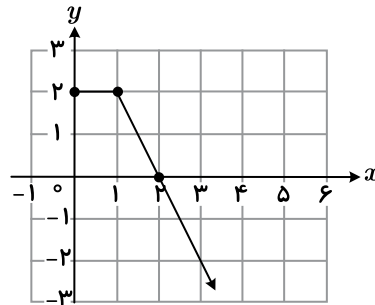
$$D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \leq 3 \rightarrow D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = [-2, 6]$$

$$D_g = [0, 5], R_g = [-4, 6]$$



۲۳

الف



ب

$$g \circ f(0) = g(2) = 0$$

۲۴

الف

$$g(x) = x^2$$

$$\text{عنت : } g \circ f(x) = g(f(x)) = (2x^2 - 5x + 1)^2$$

ب

-۵

$$\text{عنت : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{-x^2} = -5$$

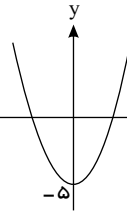
۲۵

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$x^2 \geq 2 = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 2\}$$

$$g(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$= x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



۲۶

است با انتخاب $x \geq 0$ یا $x \leq 0$ تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می شود.

$$f(x) = \sqrt{x-4} \rightarrow D_f : x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4, \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = \{x \geq 4, x \neq 5\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$$

$$f(x) = 3x - 4 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 4$$

$$\text{پس: } 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$$

$$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) \equiv \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow D_f : x^2 + 2x \geq 0 \rightarrow x \leq -2$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \leq -2 | \sqrt{x^2 + 2x} \in \mathbb{R}\} = x \leq -2 \rightarrow x \in (-\infty, -2]$$

۲۸

۲۷

الف

۲۹

الف

ب

$$g \circ f(2) - \frac{f}{g}(0) = g(f(2)) - \frac{f(0)}{g(0)} = g(0) - \frac{f(0)}{g(0)} = -1 - \frac{2}{-1} = -1 + 2 = 1$$

۳۰

الف

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$g(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} : \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, 2x^2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

ب

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

۳۱

الف

$$f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-2) = 1$$

ب

$$g(3t-1) = 0 \xrightarrow{g(-4)=0} 3t-1 = -4 \rightarrow 3t = -3 \rightarrow t = -1$$

پ

$$x \leq -2$$

الف ۳۲

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$2x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

ب

$$f(2) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 1$$

$$g \circ f = \{(0, 4), (3, 7), (5, 0)\}$$

۳۳

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in [-3, +\infty) | \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\} = [-3, +\infty)$$

الف ۳۴

$$(g \circ f)(1) = g(3) = \sqrt{6}$$

ب

۳۵

الف درست

ب درست

پ نادرست

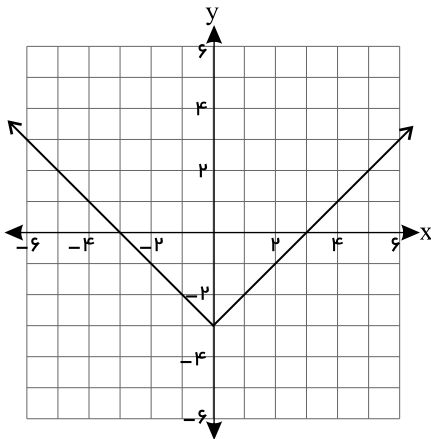
$$(g \circ f)(-1) = g(1) = -5$$

۳۶

الف

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(0) = -4$$

ب



پ

الف) $g(f(1)) = g(2) = -2$

۳۷

ب) $(f+g)(0) = -1+3=2 \Rightarrow (f \circ (f+g))(0) = f(2) = -5$

۳۸

الف

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} | x-1 \geq -1\} = [0, +\infty)$$

ب

$$f(g(x)) = \sqrt{x-1+1} = \sqrt{x}$$

۳۹

الف $\frac{1}{3}$

ب $\frac{17}{25}$

پ صفر

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq -1 | \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

$$\sqrt{x+1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_{fog} = [-1, 0) \cup (0, +\infty) \cup [-1, +\infty) - \{0\}$$

۴۰

$$x = 3 \rightarrow 2(3) - 2 = 4 \rightarrow \frac{4}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{5}$$

۴۱

۴۲

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1$$

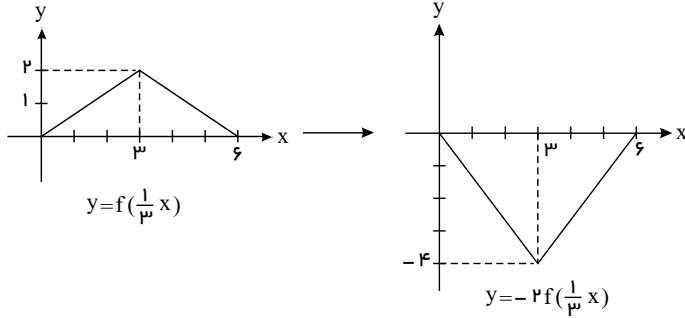
$$g(x) = 8x^2 + 4$$

۴۳

الف درست

۴۴

ابتدا طول نقاط را ۳ برابر کرده و سپس عرض نقاط را ۲- برابر کنیم.



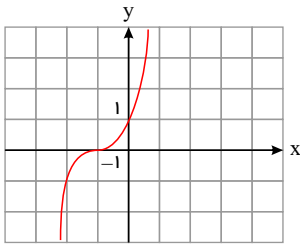
۴۵

الف ثابت

ب π

۴۶

برای رسم نمودار تابع ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم. تابع اکیداً صعودی است.

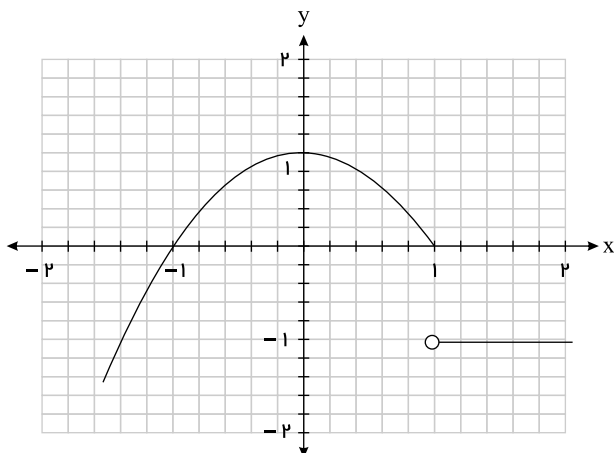


۴۷

با توجه به اکیداً صعودی بودن $\log(x+1) \leq \log(2x-3) \rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$

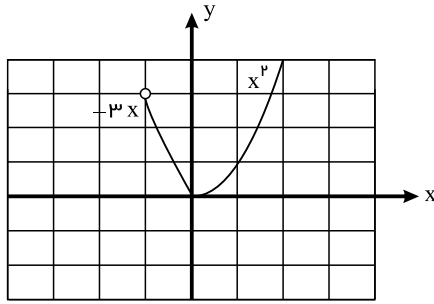
۴۸

با توجه به نمودار در بازه $(1, +\infty) \cup [-\infty, 0]$ صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است.



۴۹

الف درست



۵۰

اکیداً نزولی $(-1, 0]$
اکیداً صعودی $[0, +\infty)$

۵۱

- الف درست
- ب درست.
- پ نادرست.

۵۲

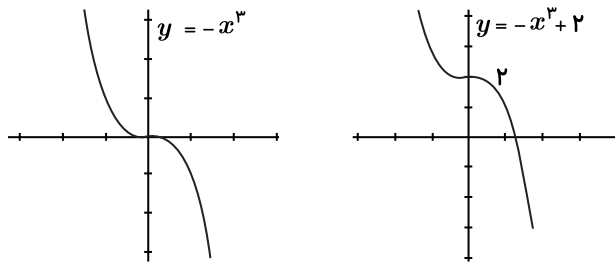
- الف درست
- ب نادرست
- پ نادرست

۵۳

الف پایین

۵۴

تابع اکیداً نزولی است.



۵۵

(الف)

$$f(x) = \frac{x+3}{2x} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = 3x - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}, 3x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{3}\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = 4$$

$$f^{-1}(5) \rightarrow 5 = \frac{1}{8}x - 3 \rightarrow \frac{1}{8}x = 8 \rightarrow x = 64$$

$$g^{-1}(64) \rightarrow 64 = 3x - 1 \rightarrow x = 4$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = 4$$

(ب)

علت:

۵۶ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$\text{علت: } \begin{cases} f^{-1}(\delta) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = \delta \rightarrow \frac{1}{\lambda}\alpha - 3 = \delta \rightarrow \frac{1}{\lambda}\alpha = \delta + 3 \rightarrow \alpha = \lambda(\delta + 3) \\ g^{-1}(64) = \beta \rightarrow g(\beta) = 64 \rightarrow \beta^2 = 64 \rightarrow \beta = 8 \end{cases}$$

می‌دانیم که $f^{-1} \circ f(x) = x$ و $f \circ f^{-1}(x) = x$ است. (57)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x + 4 - 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{3x - 4 + 4}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وارون یکدیگرند. (58)

$$f(x) = -\frac{y}{3}x - 3 \rightarrow y = -\frac{y}{3}x - 3 \rightarrow \frac{y}{3}x = -y - 3 \rightarrow 3x = -3y - 6 \rightarrow x = \frac{-3y - 6}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x - 6}{3}$$

$$y = -5 - \sqrt{3x+1} \rightarrow \sqrt{3x+1} = -5 - y \rightarrow 3x+1 = 25 + y^2 + 10y \rightarrow 3x = y^2 + 10y + 24 \rightarrow x = \frac{y^2 + 10y + 24}{3}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y^2 + 10y + 24}{3}$$

$$f(x) = (x+2)^2 - 1 \rightarrow y+1 = (x+2)^2 \xrightarrow{x \geq -2} \sqrt{y+1} = x+2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2 \rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, -2]$$

$$y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+4)^2 - 4$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$$

$$(g \circ f)^{-1}(7) = (f^{-1} \circ g^{-1})(7) = f^{-1}(2) = 3$$

$$(g \circ f)(x) = 7 \Rightarrow ((1 + \sqrt{x-2})^2 - 1) = 7 \Rightarrow x = 3$$

$$(g \circ f)(x) = (1 + \sqrt{x-2})^2 - 1 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 + 2 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(7) = 3$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 + 2 \xrightarrow{x=7} 3$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

ب نادرست

ب نادرست

الف درست

ت درست

۶۶

$$2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x = \sin 4(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$$

۶۷

الف ۲

ب $\frac{1}{4}$

۶۸

الف ۳ و π

۶۹

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow T = 4 \quad \max : |a| + c = 1 + \sqrt{3}$$

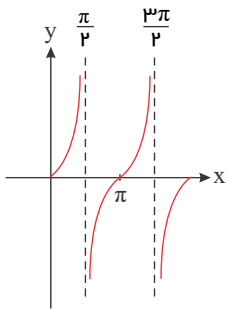
$$\min : -|a| + c = -1 + \sqrt{3}$$

۷۰ الف) نادرست - می‌دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. پس داریم:

$$\text{مقدار مینیمم} = -|-3| + 2 = -1$$

ب) نادرست

زیرا همان‌طور که در شکل مشخص است تابع تنازنت در یک دوره تناوب خود صعودی است، نه در دامنه.



۷۱ می‌دانیم تابع $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

$$\begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$y = -3 \sin(-2x) \text{ یا } y = 3 \sin(-2x) \text{ یا } y = -3 \sin(2x) \text{ یا } y = 3 \sin(2x)$$

۷۲ الف)

$$y = a \sin bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \text{Max} = |a| + c \\ \text{Min} = -|a| + c \end{cases}$$

پس:

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Max} = |a| + c = |-3| + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\text{Min} = -|a| + c = -|-3| + 2 = -3 + 2 = -1$$

ب)

$$y = \tan f(x) \rightarrow f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

پس:

$$f(x) = \tan 2x \rightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۷۳ می‌دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\text{ماکزیمم: } \max = |-3| + 1 = 4$$

$$\text{مینیمم: } \min = -|-3| + 1 = -2$$

۷۴ الف) می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ همواره داریم: $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$

$$\text{پس: } \begin{cases} \max = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \min = -|-2| + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

ب) می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1 \rightarrow \cos 2\alpha - \sin \alpha = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0 \rightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

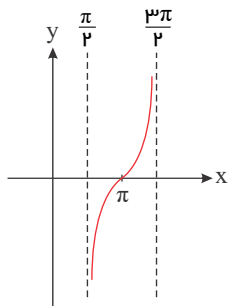
$$a+c=b \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۷۵ در تابع $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \\ \max = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \\ \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2 \end{cases}$$

۷۶

الف) درست است؛ زیرا با توجه به شکل واضح است که تابع $\tan x$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است.



ب) نادرست است؛ زیرا می‌دانیم دامنه تابع تانژانت مجموعه $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ است.

۷۷ توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\text{دوره تناوب: } \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

$$\begin{cases} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

از طرفی:

هریک از توابع $y = 4 \sin(2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(2x) + 2$ یا $y = 4 \sin(-2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(-2x) + 2$ صحیح است.

۷۸

الف) می‌دانیم دوره تناوب $y = a \cos bx + c$ برابر است با: $\frac{2\pi}{|b|}$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\text{دوره تناوب: } \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

۷۹) می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$\text{مقدار ماکزیمم تابع: } |a| + c$$

$$\text{مقدار مینیمم تابع: } -|a| + c$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} \max y = |a| + c = 2 + 1 = 3 \\ \min y = -|a| + c = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

۸۰) دوره تناوب تابع $y = a \cos bx + c$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

۸۱) در تابع $y = a \sin bx + c$ ، $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = \pi \sin(-x) + 1 \rightarrow y = -\pi \sin x + 1 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi \\ \max = |a| + c = |-\pi| + 1 = \pi + 1 \\ \min = -|a| + c = -|\pi| + 1 = -\pi + 1 \end{cases}$$

۸۲) می‌دانیم: در تابع $y = a \cos bx + c$ مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{2}x$$

$$\text{ماکزیمم: } \max(y) = \pi + \sqrt{5}$$

$$\text{مینیمم: } \min(y) = -\pi + \sqrt{5}$$

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۸۳

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}$$

۸۴) با توجه به نمودار ضابطه به صورت $y = a \sin bx + c$ ، $a = -\frac{1}{3}$ ، $b = 3$ می‌شود.

$$\max y = \frac{1}{3}, \min y = -\frac{1}{3}, T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

۸۵

الف)

$$y = a \cos bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi \\ \max = |8| + 0 = 8 \\ \min = -|8| + 0 = -8 \end{cases}$$

ب)

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

۸۶

$$c = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$|a| = \frac{5 - 1}{2} = 2, a > 0, a = 2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \quad \text{یا} \quad y = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 3$$

دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

۸۷

۸۸

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 3 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3}$$

$$|a| = 1, c = 4 \Rightarrow y = \sin \frac{2\pi}{3}x + 4 \quad \text{یا} \quad y = -\sin \frac{2\pi}{3}x + 4$$

۸۹

$$|b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \rightarrow b = \pm\pi$$

$$\rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm\pi x)$$

$$|a| = \frac{4 - (-4)}{2} = 4 \rightarrow a = \pm 4$$

$$c = \frac{4 + (-4)}{2} = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \quad \max = |a| + c = 4, \quad \min = -|a| + c = -4$$

۹۰

۹۱

$$2T = \frac{4\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \rightarrow T = 2\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \rightarrow b = \pm 1$$

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$|a| = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \rightarrow a = -3$$

۹۲

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۹۳

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \quad a = -2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad b = 1 \quad f(x) = -2 \cos x$$

$$c = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

۹۴

$$|a| = \frac{5 - (-1)}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3, \quad c = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

$$|b| = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}, \quad y = \pm 3 \sin\left(\pm \frac{1}{4}x\right) + 2$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{2 - (-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$|a| + 3 = 6 \Rightarrow |a| = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$|a| = \frac{Max - Min}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3 \quad c = \frac{Max + Min}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$$

$$\begin{cases} |a| + c = 9 \\ -|a| + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ |a| = 3 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۹۸

$$\begin{cases} |a| + c = \frac{2}{3} \\ -|a| + c = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} c = \frac{max + min}{2} \\ |a| = \frac{max - min}{2} \end{cases} \Rightarrow c = 1, |a| = \frac{1}{3}$$

$$T = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}\sin(2x) + 1 \quad \text{یا} \quad y = \frac{1}{3}\sin(-2x) + 1$$

$$\tan \alpha > \cos \alpha$$

۱۰۰

$$2 \cos^2 x - 1 - 13 \cos x - 6 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 13 \cos x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = +7 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\sin x - \cos 2x = 0 \rightarrow \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 + A - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -1 \rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{می دانیم: } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

۹۵

با توجه به نمودار تابع، ab باید عددی منفی شود؛ بنابراین $ab = -1$.

۹۶

۹۷

الف) روش اول:

روش دوم:

ب

۹۹

۱۰۱) می دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

۱۰۲



$$2 \cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۰۳

الف

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

ب در تابع $y = a \cos bx + c$ دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است.

$$y = -3 \cos 2\pi x + 1 \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \\ Max = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ Min = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

پ می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

۱۰۴ می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\rightarrow \cos x(2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۱۰۵

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۰۶

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۰۷

$$\cos x(2 \cos x - 9) = 5 \rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 9A - 5 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 11}{4} = 5 \Rightarrow \cos x = 5 \text{ (امکان ندارد)} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۰۸

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = A} A^2 + A - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 3 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2} < -1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۱۰۹

$$\cos 3x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

110

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

111

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

112

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z}) \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

113

$$-2 \sin^2 x - \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (ک غ ق)$$

114

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

115

$$1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 4 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{2} \quad \text{ک غ ق} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

116

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

117

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \times \sin \theta = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ, \theta = 135^\circ$$

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

118

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

119

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۲۰

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

۱۲۱

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24}$$

$$x = \frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{24}$$

روش اول: ۱۲۲

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \left(x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\xrightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

روش دوم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{(0, \pi)} 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \xrightarrow{(0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

روش سوم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{(0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

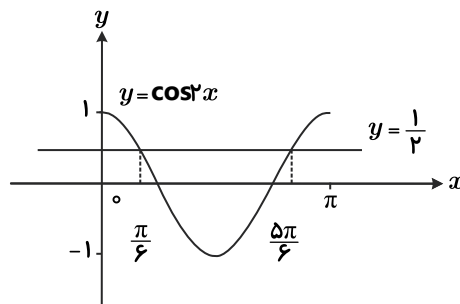
روش چهارم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{(0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

روش پنجم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{(0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$



۱۲۳

$$f(x) = x^r + ax^r + bx + 1$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow r = f(2) = 0 \Rightarrow 2^r + a \times 2^r + b \times 2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow r = f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^r + a(-1)^r + b(-1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\xrightarrow{(1)} 4a + 2a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = b = -\frac{3}{2}$$

چون $f(x)$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم صفر است. ۱۲۴

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$\text{زوج } n, (x^n - 1) = (x + 1) \cdot (x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} \dots - 1)$$

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

نکته: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$ (۱۲۷)

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow p(1) = 4 \rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow p(-2) = 0 \rightarrow 4a + b = 8 \quad (2)$$

در نتیجه با حل دستگاه معادله (۱) و (۲) داریم:

$$a = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{4}{3}$$

نکته: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$ (۱۲۸)

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow p(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow p(-1) = 0 \rightarrow a - b = 0 \quad (2)$$

از حل رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

129

الف درست

ب درست

پ نادرست

می دانیم: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر است با: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$ (۱۳۰)

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2, \quad P(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b = -6 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, \quad P(-1) = 3 \rightarrow a - b = 6 \quad (2)$$

$$a = 1 \quad \text{و} \quad b = -5$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

131

۱۳۲

درست الف

درست ب

۱۳۳

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 7 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow a = -9$$

۱۳۴

پایین‌تر الف

ب

$$(x + 1)$$

۱۳۵

درست الف

۱۳۶

الف

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{(2)(2)} = \frac{1}{4}$$

ب

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

۱۳۷

الف

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

۱۳۸

الف

حد صورت و مخرج کسر را در نقطه $\frac{\pi}{2}$ به دست آورده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = 0$$

ب

برای محاسبه حدهایی که صورت و مخرج آنها به بی‌نهایت میل می‌کند و همچنین دو تابع چند جمله‌ای هستند، از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

نکته: $ax^n + bx^{n-1} + \dots \sim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$ هم‌ارزی پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r + 1}{x^r + 2x^r + 1} \stackrel{\text{قاعده پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r}{x^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1} = 0$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

۱۳۹



۱۴۰

- الف) $-\infty$
 ب) $+\infty$
 پ) -2

۱۴۱) خیر، زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{[x]-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.

۱۴۲

- الف) -3
 ب) $+\infty$

۱۴۳

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = 2$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$$

۱۴۴

الف

برای رفع ابهام حد این تابع در $x \rightarrow 1^+$ ، صورت کسر را تجزیه کرده و کسر را ساده می‌کنیم:
 داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

ب

در چند جمله‌ای مقابل از x^3 فاکتور می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

راه حل دوم: همچنین با توجه به هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

پ

قاعده پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 4x}$$

برای محاسبه حدهایی که صورت و مخرج آنها به بی‌نهایت میل کرده و دو تابع چندجمله‌ای هستند از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:
 نکته:

$$\text{هم‌ارزی پرتوان: } ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$$

۱۴۵

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{1}{5}$$

الف) ۱۴۶



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)}{(x^2 - 16)(2 + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)}{(x + 4)(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{(4)(4)} = -\frac{1}{32}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

هرگاه در مسائل حدی، کسینوس یک شد حتما 1^- است.

۱۴۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{4}$$

۱۴۸

الف

هرچه x به 2^+ می‌رود، x^2 هم به 4^+ میل می‌کند پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{4 - x^2} = \frac{5}{4 - 4^+} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

ب
حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است. لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = -\frac{4}{3}$$

۱۴۹

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[2^-] - 3}{2^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x+1-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1} + 2) = 6 \times 4 = 24$$

۱۵۰

الف

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x - \sqrt{2x+3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(x - \sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)(x - \sqrt{2x+3})}{(x-3)(x+1)} = \frac{(-2)(-2)}{-4} = -1$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

توجه کنید مخرج به علت داشتن قدرمطلق وقتی $x \rightarrow 3$ برابر 0^+ است.

۱۵۱

الف

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$ داریم:

$$\frac{[3^+] - 2}{3 - 3^+} = \frac{3 - 2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ب با استفاده از قاعده پرتوان برای کسر اول و همچنین $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} - 0 \right) = 3 - 0 = 3$$

۱۵۲

الف با فاکتورگیری از صورت کسر و ساده کردن آن داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ب با توجه به قاعده پرتوان داریم:

$$\text{قاعده پرتوان: } ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} \stackrel{\text{بنابر قاعده پرتوان}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

۱۵۳

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)(x + \sqrt{x+6})}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x + \sqrt{x+6})}{(x-3)(x+2)} = \frac{(4)(6)}{(5)} = \frac{24}{5}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{2 - 3}{3^- - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۱۵۴

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2 + \sqrt{x+1})}{4 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2 + \sqrt{x+1})}{-(x-3)} = \frac{(6)(4)}{-1} = -24$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|} = \frac{[\frac{1}{2}] - 3}{\frac{0}{+}} = \frac{0 - 3}{\frac{0}{+}} = \frac{-3}{\frac{0}{+}} = -\infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{\sim} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۱۵۵

الف

ب با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow (-1)} [x] = -2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x] + 1}{x + 1} = \frac{[-1^-] + 1}{\frac{0}{-}} = \frac{-1}{\frac{0}{-}} = +\infty$$

۱۵۶

الف

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{2 - 3}{3^- - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۱۵۷

الف

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{-1}{|3x+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{3}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $-\frac{1}{3}$ برابر ۱- است. بنابراین جواب حد برابر $-\infty$ می‌شود.

پ

$$\frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$$

با توجه به نمودار هر چه x به صفر نزدیک‌تر می‌شود (چه از راست و چه از چپ)، مقادیر $f(x)$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

۱۵۸

 $+\infty$

۱۵۹

الف

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0$ و $|x - 2|$ همواره عددی نامنفی است داریم:

$$\frac{3}{0^+} = +\infty$$

۱۶۰

الف

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{6}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta}$$

۱۶۱

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)}{(2x+1)} = \frac{1}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۱۶۲

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

پ



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^y(-x + \frac{5}{x^5})}{x^r(x + \frac{9}{x^r})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)x^r = -\infty$$

۱۶۳

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 3$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^r + 4x^5}{x^r - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^r} = +\infty$$

۱۶۴

الف

$$\frac{3}{0^+} = +\infty$$

ب

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

۱۶۵

الف

$$\frac{1}{(0)^-} = -\infty$$

ب

$$-\frac{1}{2}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^r + 3x + 2)}{\sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = 3$$

۱۶۶

الف

$$y = a \cos bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{-\pi}{4}|} = 8$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۱۶۷

الف

$$\text{تعلت: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^y + 5x^r}{2x^r + 9} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^y}{2x^r} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{2}x^r = -\frac{3}{2}(+\infty) = -\infty$$



۱۶۸

(-∞, +∞) الف

ب صفر

علت: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{+\infty} = 0$

۲

$\frac{2}{3}$

۱۶۹

الف

ب

۱۷۰

الف

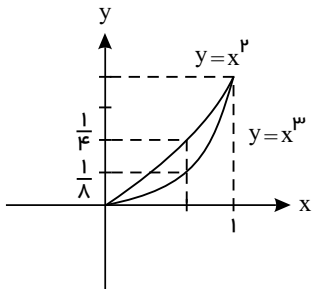
ب

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x - 4x^2}{3x + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^2} = -2$

۱۷۱

الف درست؛ به نمودار زیر دقت کنید:



ب

نادرست؛ برای مثال $f(x) = 5$ در \mathbb{R} صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۱۷۲

الف پ

۱۷۳

الف درست

۱۷۴

الف درست

۱۷۵

الف یک به یک

۱۷۶

الف درست

ب

نادرست

۱۷۷

الف نادرست

۱۷۸

الف از آنجایی که دامنه $f(x)$ بازه $[-2, 1]$ است پس برای به دست آوردن دامنه $f(3x + 1)$ داریم:

$$-2 \leq 3x + 1 \leq 1 \xrightarrow{-1} -3 \leq 3x \leq 0 \xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq 0$$

پس دامنه $f(3x + 1)$ برابر بازه $[-1, 0]$ است.

۱۷۹

الف درست

ب نادرست

۱۸۰

الف درست

۱۸۱

الف -۲

می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f(-\frac{b}{a})$.

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$r(x) = f(-1) = 2 \Rightarrow 1 - k - 1 = 2 \Rightarrow k = -2$$

ب π

۱۸۲

الف درست

$$y = -\frac{2x+6}{7} \rightarrow 7y = -2x-6 \rightarrow 2x = -7y-6 \rightarrow x = -\frac{7}{2}y-3 \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{7}{2}x-3$$

نادرست (دوره تناوب $y = \tan x$ برابر π است).

ب

۱۸۳

الف درست

ب درست

۱۸۴

الف $\sqrt[3]{x}$

۱۸۵

الف ۴

ب ۲

۱۸۶

الف تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه تعریف خود صعودی است.

۱۸۷

الف نادرست

علت: برد تابع $y = kf(x)$ برابر k برابر برد تابع $y = f(x)$ است.

ب درست

علت:

$$f(-2) = -16 + 20 + 6 - 10 = 0$$

۱۸۸

الف ثابت

ب صفر

۱۸۹

بنابراین: همواره داریم:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(5) = 5$$

ب در تغییر تابع $y = f(x)$ به تابع $y = f(2x)$ برد (مولفه دوم) تغییر نمی‌کند، فقط دامنه تابع (مولفه اول) نصف می‌شود.
(-1, 4)