فصل چهارم: مشتق

تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق (دوازدهم) ۱
محاسبهٔ مشتق با استفاده از فرمول ۵
خط مماس بر منحنی (دوازدهم) ۹
بررسی مشتق پذیری ۱۰
آهنگ تغییر (دوازدهم) ۱۲

فصل پنجم: کاربرد مشتق

اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع از روی نمودار (دوازدهم) ۱۴
نقاط بحرانی (دوازدهم) ۱۴
اکسترمم‌های مطلق ۱۴
بهینه سازی (دوازدهم) ۱۴
بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق (دوازدهم) ۱۵
اکسترمم‌های نسبی ۱۶
رابطه‌ی بین f و f' (دوازدهم) ۱۷

فصل ششم: هندسه

تفکر تجسمی (دوازدهم) ۱۷
بیضی ۱۷
دایره ۱۹

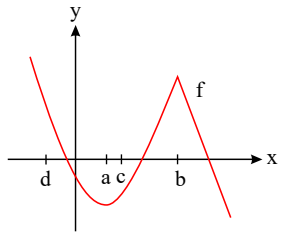
فصل هفتم: احتمال

احتمال شرطی و قانون ضرب احتمال‌ها (یازدهم) ۲۰
پیشامدهای مستقل و ناسازگار (یازدهم) ۲۰
قانون احتمال کل (نمودار درختی) (یازدهم) ۲۱

فصل چهارم: مشتق

تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق (دوازدهم)

۱ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. ۱۳۹۸

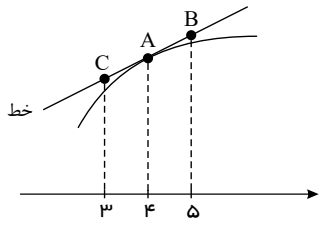


الف طول نقطه‌ای که مماس در آن افقی است. ۱۳۹۸

ب طول نقطه‌ای که مشتق در آن مقداری منفی است. ۱۳۹۸

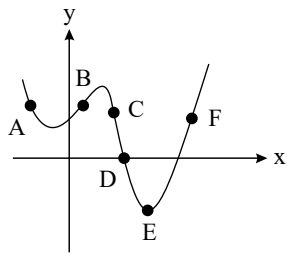
پ طول نقطه‌ای که تابع در آن مشتق‌پذیر نیست. ۱۳۹۸

۲ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(۴) = ۱٫۵$ و $f(۴) = ۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید. ۱۳۹۸



۳ اگر $f(x) = ۱ - ۲x^۲$ باشد. $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید. ۱۳۹۸

۴ با توجه به نمودار داده‌شده، گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید. ۱۳۹۸



الف در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟

الف) B ب) E ۱۳۹۸

ب شیب خط مماس در نقطهٔ F چه علامتی دارد؟ ۱۳۹۸

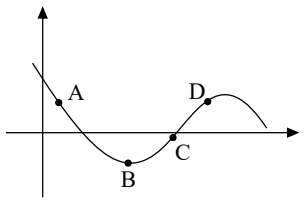
الف) مثبت ب) منفی

پ شیب خط مماس بر نمودار، در نقطهٔ D نسبت به نقطهٔ B چگونه است؟ ۱۳۹۸

الف) بیشتر ب) کمتر

۵ نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

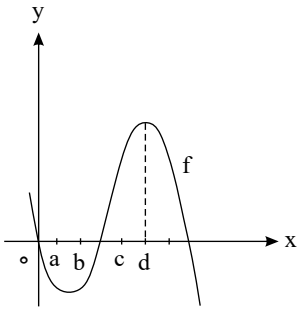
۱۳۹۸



شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه				

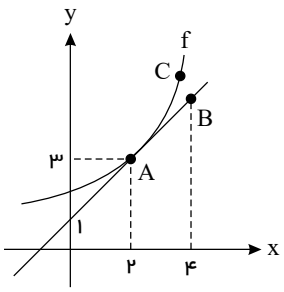
۶ مشتق تابع $f(x)=x^{۳}-۲$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ به دست آورید. ۱۳۹۸

۷ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a و b و c و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید. ۱۳۹۹



x	$f'(x)$
	۰
	۰٫۵
	۲
	$-۰٫۵$

۸ در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطهٔ $x=۲$ داده شده است: ۱۳۹۹



الف مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=۲$ بیابید. ۱۳۹۹

ب معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع را در نقطهٔ A بنویسید. ۱۳۹۹

۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۹

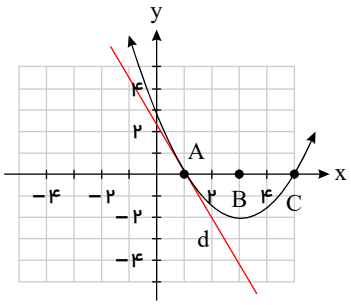
الف اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر هم نیست. ۱۳۹۹

ب تابعی وجود ندارد که برای آن $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$ باشد. ۱۳۹۹

۱۰ در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=۱$ بر نمودار f مماس شده است: ۱۳۹۹

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=۱$ محاسبه کنید.

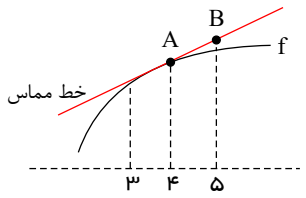
ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



۱۳۹۹

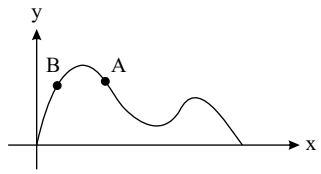
۱۱ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(۴) = \frac{۳}{۲}$ و $f(۴) = ۲۵$

باتوجه به شکل، مختصات نقاط A و B را بیابید.



۱۴۰۰

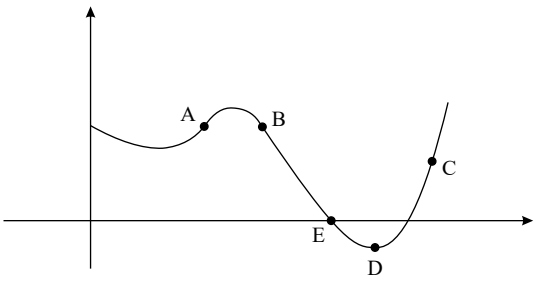
۱۲ در نمودار $y = f(x)$ شیب نمودار در نقاط A, B و شیب خط AB را، از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



۱۳ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است.)

۱۴۰۰

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	

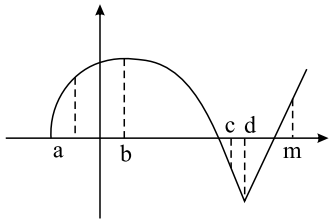


۱۴۰۰

۱۴ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^۳ - ۲x$ را در نقطهٔ $A(۱, f(۱))$ به‌دست آورید.

۱۴۰۰

۱۵ با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.



۱۴۰۰

الف طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

۱۴۰۰

ب طول نقطه‌ای را که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، بنویسید.

۱۴۰۱

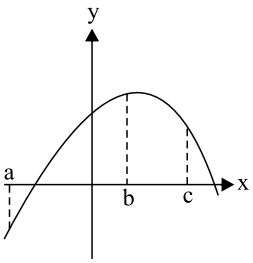
۱۶ سؤالات چهارگزینه‌ای:

۱۴۰۱

الف کدام‌یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ قرار دارد؟

الف) $(۰ , ۰)$ ب) $(۰ , ۱)$ پ) $(۰ , -۱)$ ت) $(-۱ , ۰)$

ب با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط a ، b ، c به‌ترتیب با m_a ، m_b ، m_c نمایش داده شود، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ ۱۴۰۱



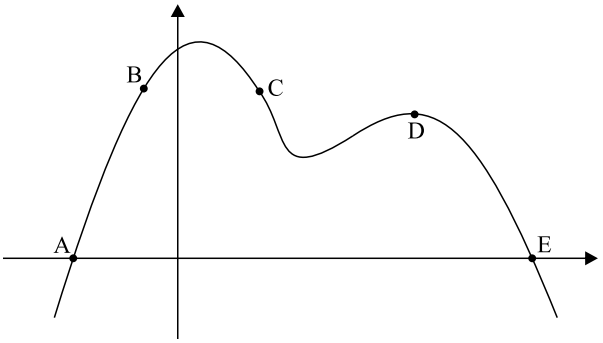
الف) $m_c > m_b > m_a$ ب) $m_b > m_a > m_c$

پ) $m_a > m_b > m_c$ ت) $m_c = m_b = m_a$

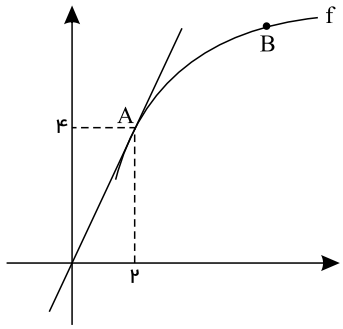
۱۷ از بین نقاط مشخص‌شده A ، B ، C ، D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه: ۱۴۰۱

الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟



۱۸ نمودار تابع f را به‌صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطهٔ A بر نمودار تابع f مماس باشد: ۱۴۰۲



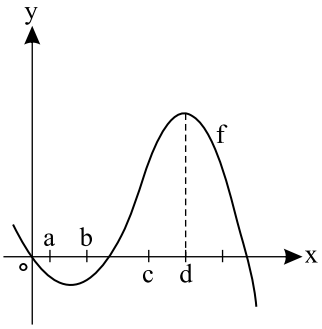
۱۴۰۲

الف حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید.

۱۴۰۲

ب شیب خط‌های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.

۱۹ با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید. ۱۴۰۰

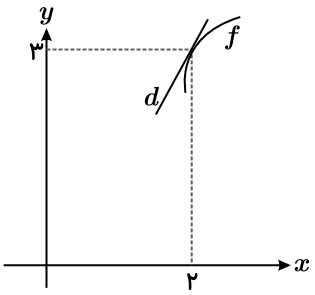


x	$f'(x)$
	۰
	۰٫۵
	۲
	−۰٫۵

۲۰ اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ آنگاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$ ۱۴۰۲

۲۱ با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم مماس چپ تابع $f(x)=|x^۲-۴|$ را در $x=۲$ بیابید. ۱۴۰۳

۲۲ با توجه به شکل، اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۵f(x)-۱۵}{x-۲}=۱۰$ باشد، معادلهٔ خط d را به دست آورید. ۱۴۰۳



محاسبهٔ مشتق با استفاده از فرمول

۲۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ۱۳۹۸

الف

$$y=\frac{x^۲+۱}{x^۳+۲x-۵}$$

۱۳۹۸

۲۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۳۹۸ الف) $f(x)=\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^۵$ ب) $g(x)=x^۲(\sqrt{x+۱})$

۲۵ مشتق تابع $y=\frac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^۴$ را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ۱۳۹۸

۲۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. ساده کردن مشتق الزامی نیست) ۱۳۹۸

الف

$$f(x)=(x^۴-۳x)^۵$$

۱۳۹۸

ب

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{۱-x}$$

۱۳۹۸

۲۷ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۳۹۹ الف) $f(x)=(x^۲+۱)^۳(۵x-۱)$ ب) $g(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۲۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. ۱۳۹۸

الف

$$f(x)=(۲x^۳+\sqrt[۳]{x}-۱)^۴$$

۱۳۹۸

۲۹ مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ۱۳۹۸

الف

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۳+۲x+۱}$$

۳۰ در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

الف اگر $f'(۲)=-۱$ و $g'(۲)=۳$، در این صورت $(۲f+۳g)'(۲)$ برابر با ..... است. ۱۳۹۹

۱۳۹۹

۳۱ مشتق توابع زیر را به دست آوردید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

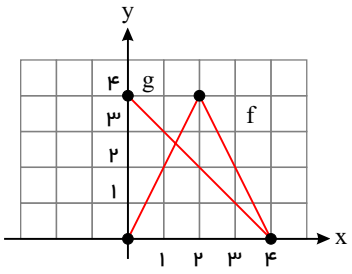
۱۳۹۹

الف) $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۳-۲x^۲}$

ب) $g(x)=\sin^۳(۲x+۱)$

۳۲ نمودار تابع f ,g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(۱)$ را بیابید.

۱۳۹۹



۳۳ مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۳۹۹

الف

$f(x)=\frac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

۱۳۹۹

ب

$g(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵)$

۱۳۹۹

۳۴ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۳۹۹

الف

$f(x)=(\frac{-۳x+۱}{x^۲+۵})^۸$

۱۳۹۹

ب

$g(x)=(\frac{۱}{x})(\sqrt{۳x+۲})$

۱۳۹۹

۳۵ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۳۹۹

الف

$f(x)=\frac{۳x+۱}{\sqrt{x}}$

۱۳۹۹

ب

$g(x)=(\frac{۱}{x})(x^۲+۵x)^۷$

۱۳۹۹

۳۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۱۳۹۹

الف

$f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

ب

$g(x)=(x^۲+۳x+۱)^۷$

پ

$$h(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۷}{-۲x+۹}$$

۱۳۹۹

۳۷) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ۱۴۰۰

لف

$$f(x)=(۴x^{۳}-۷)(۲x-۱)^{۴}$$

۱۴۰۰

۳۸)

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=(\frac{x^{۲}}{۳x-۱})^{۵}$

ب) $g(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

۱۴۰۰

۳۹) مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$

۱۴۰۰

۴۰) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ۱۴۰۰

الف

$$f(x)=(\sqrt{۳x}+۱)(۲x^{۳}-۱)$$

۱۴۰۰

ب

$$h(x)=\frac{x^{۲}-۳x}{۵x}$$

۱۴۰۰

۴۱) اگر توابع f , g مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$, $f'(۲)=۵$, $g(۲)=۸$, $g'(۲)=-۶$، حاصل $(fg)'(۲)$ را به دست آورید. ۱۴۰۱

۴۲) مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۴۰۱ $f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}$

۴۳) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ۱۴۰۱

الف

۱۴۰۱ $f(x)=\frac{-۲x+۳}{x+۴}$

ب

۱۴۰۱ $g(x)=(\sqrt{۳x+۱})(x^{۲}+۲x)$

۴۴) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۴۰۲ الف) $f(x)=x(x-۱)(x+۱)$ ب) $g(x)=(\frac{۲x-۱}{x+۱})^{۳}$

۴۵) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) ۱۴۰۱

الف

$f(x) = (x^۲ + ۲x - ۱)^۵$

۱۴۰۱

ب

$g(x) = (\sqrt{۳x + ۲})(x^۳ + ۱)$

۱۴۰۱

۴۶ اگر توابع f , g مشتق‌پذیر باشند و $f'(۱) = ۳$, $g'(۱) = ۵$ مقادیر $(۳f + ۲g)'(۱)$ را به دست آورید.

۱۴۰۱

۴۷ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۴۰۰

الف

$f(x) = (x^۲ + ۲x + ۱)^۵$

۱۴۰۰

ب

$g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{۳x + ۲}}$

۱۴۰۰

۴۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۴۰۲

الف

$f(x) = (\sqrt{۳x + ۲})(x^۳ + ۴)$

۱۴۰۲

ب

$g(x) = \dfrac{-۷x^۲ + ۱}{x - ۶}$

۱۴۰۲

پ

$h(x) = (۲x^۵ - ۱)^۴$

۱۴۰۲

۴۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۴۰۲

الف

$g(x) = \dfrac{(۲x - ۱)^۴}{x^۳ + ۸}$

۱۴۰۲

ب

$f(x) = \sqrt[۳]{۲x + ۱}$

۱۴۰۲

۵۰ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۴۰۳ $f(x) = (x - ۶)^۳ + \dfrac{۵x + ۳}{\sqrt{۲x - ۱}}$

۵۱ مشتق تابع داده‌شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱۴۰۳ $h(x) = \left(\dfrac{\sqrt{۱ - ۳x}}{۷ + x}\right)^۶$

۵۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲) = ۳$، $f'(۲) = ۱$، $g(۲) = -۳$ و $g'(۲) = ۲$، مقادیر $(fg)'(۲)$ و $(f + g)'(۲)$ را به دست آورید.

۱۳۹۸

۵۳ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ۱۴۰۳

الف

$$f(x) = (۲\sqrt{x} + ۱)(x^{۴} - ۲x)$$

۱۴۰۳

ب

$$g(x) = \frac{۳x + ۱}{x^{۵} - x + ۱}$$

۱۴۰۳

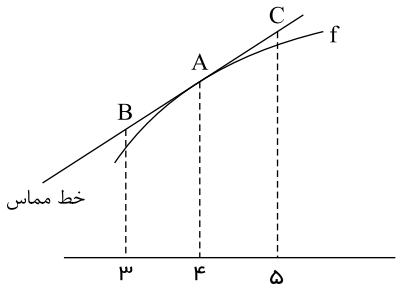
خط مماس بر منحنی (دوازدهم)

۵۴ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^{۲} + ۱۰x$ را در نقطهٔ $A(۲, f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید. ۱۳۹۹

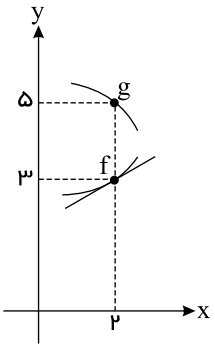
۵۵ اگر $f(x) = x^{۲} - ۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(۱)$ را حساب کنید. ۱۳۹۹

۵۶ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(۴) = ۱٫۵$ و $f(۴) = ۲۴$ ۱۴۰۰

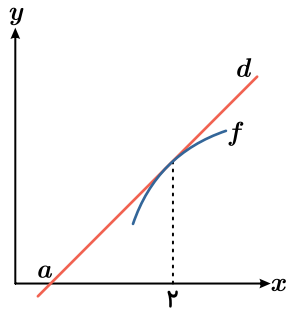
با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



۵۷ با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)g(x) - ۳g(x)}{x - ۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است؟ ۱۴۰۲



۵۸ خط d در نقطه با طول ۲ $x = ۲$ بر نمودار تابع $f(X) = -x^{۲} + ۶x - ۵$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید. ۱۴۰۳



۵۹ اگر نمودار تابع f از نقطه $A(۲, ۴)$ بگذرد و $\lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = ۳$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطهٔ A به دست آورید.

۶۰ تابع $f(x) = x^{۲} - x$ را در نظر بگیرید. ۱۴۰۳

الف آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[۰, ۲]$ به دست آورید. ۱۴۰۳

ب حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگ‌تر باشد. ۱۴۰۳

بررسی مشتق پذیری

۶۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۹

الف اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر است. ۱۳۹۹

ب تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازهٔ $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است. ۱۳۹۹

۶۲ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$ داده شده است: ۱۳۹۹

الف نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ۱۳۹۹

ب ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید. ۱۳۹۹

پ نمودار تابع f' را رسم کنید. ۱۳۹۹

۶۳ قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع f در $x = a$ پیوسته است. ۱۳۹۸

۶۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی کنید. ۱۳۹۸

۶۵ تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید: ۱۳۹۸

الف نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد. ۱۳۹۸

ب ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید. ۱۳۹۸

پ نمودار تابع f' را رسم کنید. ۱۳۹۸

۶۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست. ۱۳۹۹

۶۷ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی کنید. ۱۳۹۹

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

۶۸ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید. ۱۳۹۹

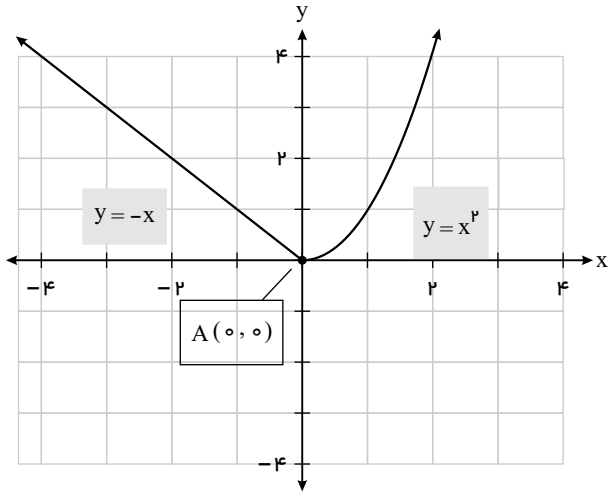
۶۹ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. ۱۳۹۹

الف اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a، ..... است. ۱۳۹۹

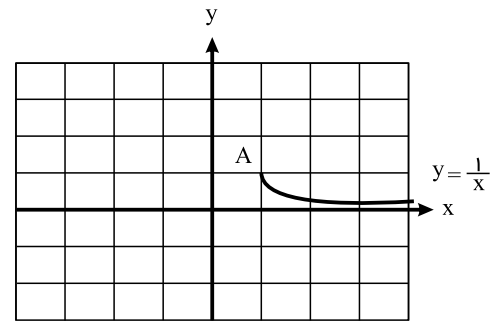
۷۰ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید. ۱۳۹۹

۷۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی کنید. ۱۴۰۰

۷۲ با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطهٔ A، نشان دهید این تابع در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیست. ۱۴۰۰



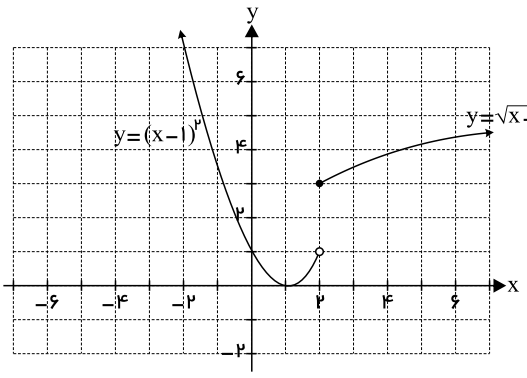
۷۳ با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم‌شدهٔ مقابل؛ مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $A(1,1)$ بررسی کنید. ۱۴۰۰



۷۴ اگر $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+3x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید. ۱۴۰۱

۷۵ معادله نیم مماس راست تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر منحنی بنویسید. ۱۴۰۱

۷۶ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1}+2 & x\geq 2 \\ (x-1)^2 & x<2 \end{cases}$ به‌صورت مقابل است: ۱۴۰۲



الف آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است؟ ۱۴۰۲

ب آیا تابع در بازهٔ $(-\infty,2)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟ ۱۴۰۲

پ مشتق راست تابع f در نقطه $x=2$ را به دست آورید. ۱۴۰۲

۷۷ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=-1$ بررسی کنید. ۱۴۰۱

$$f(x)\begin{cases} x^2+3 & x\geq -1 \\ 2x+6 & x<-1 \end{cases}$$

۷۸ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست. ۱۴۰۰

۷۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۴۰۳

الف تابع $f(x)=|x-1|$ در تمام نقاط حقیقی پیوسته است پس در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ۱۴۰۳

۸۰ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2 & x<2\\ 6x-4 & x=2\\ 2\sqrt{x-1}+6 & x>2\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=2$ بررسی کنید. ۱۴۰۳

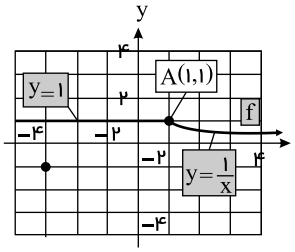
۸۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x-2|$ را در $x=2$ بررسی کنید. ۱۳۹۸

۸۲ نشان دهید نقطه‌ای به طول $x=-1$، نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع $f(x)=|x^2+x|$ است. ۱۳۹۸

۸۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ بررسی کنید. ۱۳۹۸

۸۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید. ۱۳۹۹

۸۵ با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ A، نشان دهید که تابع f در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیست. ۱۴۰۰



آهنگ تغییر (دوازدهم)

۸۶ یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظهٔ $t=9$ چقدر است؟ ۱۳۹۸

۸۷ یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازهٔ زمانی $[3,4]$ چقدر است؟ ۱۳۹۸

۸۸ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^3-2x$ را در بازهٔ $[0,2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x=1$ محاسبه کنید. ۱۳۹۸

۸۹ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می کند به‌دست آورید. ۱۳۹۸

۹۰ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=2t^2-t$ ، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,4]$ با هم برابرهستند؟ ۱۳۹۸

۹۱ تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[0,25]$ چقدر است؟ ۱۳۹۹

۹۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۹

الف سرعت لحظه‌ای در $t=2$ برای متحرکی با معادلهٔ حرکت $f(t)=t^2+3t$ برابر ۷ است. ۱۳۹۹

۹۳ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازهٔ زمانی $[0,5]$ داده شده است. در کدام لحظه در این بازه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط با هم برابرهستند؟ ۱۳۹۹

۹۴ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. ۱۳۹۹

الف جرم این توده باکتری در بازه زمانی $1\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ ۱۳۹۹

ب آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=4$ چقدر است؟ ۱۳۹۹

۹۵ خودرویی در امتداد خط راست طبق معادلهٔ $d(t)=-5t^2+20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0\le t\le 5$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t=2$ چقدر است؟ ۱۳۹۹

۹۶ در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. ۱۳۹۹

الف سرعت لحظه‌ای در $t=9$ برای متحرکی با معادلهٔ حرکت $f(x)=\sqrt{t}$ برابر ..... است. ۱۳۹۹

۹۷ جسمی از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب شده است، که معادلهٔ ارتفاع آن از سطح زمین به‌صورت $f(t) = -۲t^۲ + ۱۰t$ است. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = ۲$ به دست آورید. ۱۴۰۰

۹۸ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰, ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰, ۵]$ با هم برابرند؟ ۱۴۰۰

۹۹ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم.
ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t) = -۵t^۲ + ۴۰t$ به‌دست می‌آید: ۱۴۰۰

الف) سرعت متوسط جسم را در بازهٔ $[۵, ۸]$ به‌دست آورید.

ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $۳۵m/s$ است.

۱۰۰ جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t) = -۵t^۲ + ۴۰t$ به دست می‌آید. مطلوب است: ۱۴۰۰

الف) سرعت متوسط در بازهٔ $[۱, ۲]$

ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = ۳$

۱۰۱ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازهٔ $[۰ , ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط ۱۴۰۱ را در بازه زمانی $[۰ , ۵]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظه $t = ۲$ به دست آورید.

۱۰۲ تابع $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود شصت‌ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰, ۲۵]$ چقدر است؟ ۱۴۰۱

۱۰۳ جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -۴t^۲ + ۴۰t$ به دست می‌آید. ۱۴۰۲

الف) سرعت متوسط در بازهٔ $[۲, ۴]$ را بیابید.

ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

۱۰۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازه $[۰, ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰, ۵]$ با هم برابرند؟ ۱۴۰۱

۱۰۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ متوسط قد کودکان تا شصت‌ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. ۱۴۰۰

الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[۰, ۲۵]$ چقدر است؟
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ماهگی چقدر است؟

۱۰۶ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۵x + ۱$ در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲, ۰]$ است؟ ۱۴۰۲

۱۰۷ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ + ۲t + ۳$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰, ۲]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰, ۲]$ با هم برابرند؟ ۱۴۰۲

۱۰۸ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = ۲t^۳ + t - ۱$ است: ۱۴۰۳

الف سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $[۱, ۲]$ را محاسبه کنید. ۱۴۰۳

ب سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t = ۲$ چقدر است؟ ۱۴۰۳

۱۰۹ گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V = ۲۰(۱ - \frac{t}{۵۰})^۲$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[۰, ۵۰]$ می‌شود؟ ۱۴۰۳

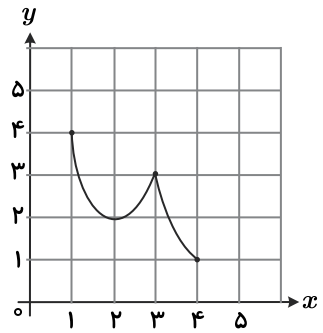
فصل پنجم: کاربرد مشتق

اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع از روی نمودار (دوازدهم)

۱۱۰ با رسم جدول تغییرات تابع، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید. ۱۴۰۳

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}-۱۵x+۴$$

۱۱۱ در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید. ۱۴۰۳



نقاط بحرانی (دوازدهم)

۱۱۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۴۰۲

الف نقطهٔ $(۱,۱)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x)=|۲-x^{۲}|$ است. ۱۴۰۲

ب هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است. ۱۴۰۲

۱۱۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۹

الف هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ۱۳۹۹

۱۱۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۴۰۰

الف هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ۱۴۰۰

ب هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد. ۱۴۰۰

اکسترمم‌های مطلق

۱۱۵ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}$ را در بازهٔ $[۰,۲]$ تعیین کنید. ۱۳۹۸

۱۱۶ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲x$ را در بازهٔ $[-۱,۳]$ مشخص کنید. ۱۳۹۹

۱۱۷ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ را دربارهٔ $[-۱,۲]$ تعیین کنید. ۱۴۰۰

۱۱۸ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را در بازهٔ $[-۱,۱]$ تعیین کنید. ۱۴۰۰

۱۱۹ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲x$ را در بازهٔ $[-۱,۳]$ مشخص کنید. ۱۴۰۱

۱۲۰ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۷$ را در بازهٔ $[-۱,۳]$، درصورت وجود به‌دست آورید. ۱۳۹۹

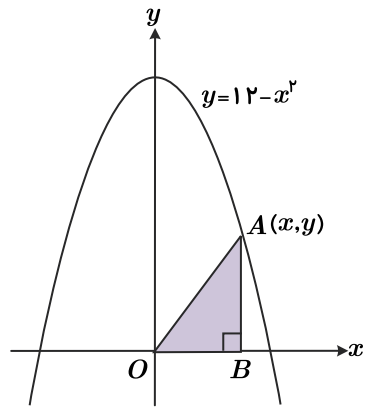
بهینه سازی (دوازدهم)

۱۲۱ هر صفحهٔ مستطیل‌شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲cm^{۲}$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $۲cm$ و حاشیه‌های کناری هرکدام یک سانتی‌متر درنظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن باشد. ۱۳۹۹

۱۲۲ ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟ ۱۳۹۸

۱۲۳ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq ۳$) ۱۴۰۳

۱۲۴ مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = ۱۲ - x^۲$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ۱۴۰۳



۱۲۵ دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $۲a + b = ۶۰$ و حاصل‌ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن گردد. ۱۳۹۸

۱۲۶ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد. ۱۳۹۹

۱۲۷ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشد. ۱۴۰۰

۱۲۸ در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید. ۱۴۰۰

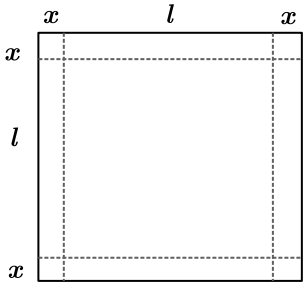
۱۲۹ اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطهٔ $۵x - y = ۱۰$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب این دو عدد مینیمم شود. ۱۴۰۱

۱۳۰ نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند. ۱۴۰۱

۱۳۱ پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد. ۱۴۰۲

۱۳۲ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصل‌ضرب‌شان کمترین مقدار ممکن گردد. ۱۴۰۲

۱۳۳ ورق فلزی مربع‌شکلی به طول ضلع $۳۰cm$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص‌شده در شکل، یک جعبهٔ درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟ ۱۴۰۳



۱۳۴ اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکسیمم شود. ۱۳۹۸

۱۳۵ دو عدد حقیقی را بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن شود. ۱۴۰۰

۱۳۶ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد. ۱۴۰۲

بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق (دوازدهم)

۱۳۷ با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^۳ - ۲۷x + ۱$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟ ۱۴۰۳

۱۳۸ تابع $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ ۱۳۹۸

t.me/Alpshool

۱۳۹ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. ۱۴۰۰

الف) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^3-3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر ..... است. ۱۴۰۰

ب) شعاع دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ برابر ..... است. ۱۴۰۰

۱۴۰ با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-12x+4$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است؟ ۱۴۰۱

۱۴۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ ۱۴۰۰

۱۴۲ بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=-2x^3+6x+11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید. ۱۴۰۲

۱۴۳ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. ۱۳۹۸

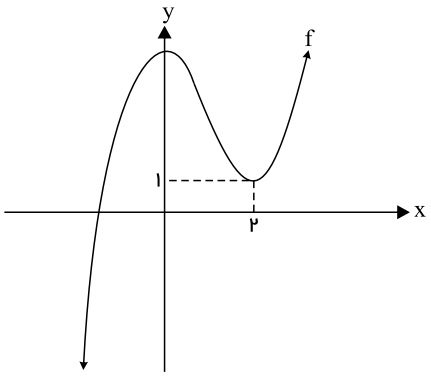
الف) مشتق تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ در نقطه‌ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد ..... است. ۱۳۹۸

ب) اگر تابع $y=f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه ..... است. ۱۳۹۸

۱۴۴ نمودار تابع $f(x)=x^2+2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟ ۱۳۹۹

۱۴۵ اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است. ۱۴۰۰

اکسترمم‌های نسبی



۱۴۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3+bx^2+d$ به‌صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید. ۱۴۰۲

۱۴۷ اگر نقطهٔ $(2,1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید. ۱۳۹۹

۱۴۸ ضرایب a و b را در تابع $f(x)=-x^4+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطهٔ $(1,2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد. ۱۳۹۸

۱۴۹ الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. ۱۳۹۸

ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازهٔ $[-1,3]$ مشخص کنید.

۱۵۰ مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$ را در بازهٔ $[-2,3]$ به‌دست آورید. ۱۳۹۸

۱۵۱ الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ۱۳۹۸

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)=x^3+2x-5$ را در بازهٔ $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

۱۵۲ اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکسیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید. ۱۳۹۸

۱۵۳ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ ۱۳۹۹

۱۵۴ تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را در نظر بگیرید:

الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ۱۳۹۹

ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0,3]$ در صورت وجود به‌دست آورید. ۱۳۹۹

۱۵۵ اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای اکسترمم نسبی برابر -3 باشد، مقادیر a و b را بیابید. ۱۳۹۹

۱۵۶ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

۱۴۰۰ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

۱۵۷ اگر نقطهٔ $(2, 1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید. ۱۴۰۰

۱۵۸ اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b ، d را به دست آورید. ۱۴۰۱

۱۵۹ نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

۱۴۰۲ $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

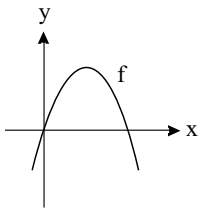
۱۶۰ درستی یا نادرستی عبارت را تعیین کنید. ۱۴۰۰

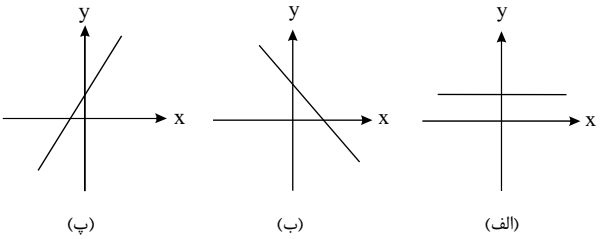
الف اگر $x = c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. ۱۴۰۰

۱۶۱ اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود. ۱۴۰۰

رابطه‌ی بین f و f` (دوازدهم)

۱۶۲ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است. ۱۳۹۸





فصل ششم: هندسه

تفکر تجسمی (دوازدهم)

۱۶۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۴۰۱

الف شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد. ۱۴۰۱

۱۶۴ در جاهای خالی عبارات مناسب قرار دهید. ۱۴۰۱

الف شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، ..... آن نامیده می‌شود. ۱۴۰۱

۱۶۵ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۸

الف شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به‌صورت مخروط می‌باشد. ۱۳۹۸

بیضی

۱۶۶ کانون‌های یک بیضی نقاط $(3, 1)$ و $(-5, 1)$ است. ۱۳۹۹

الف فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید. ۱۳۹۹

ب اگر $a = 6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. ۱۳۹۹

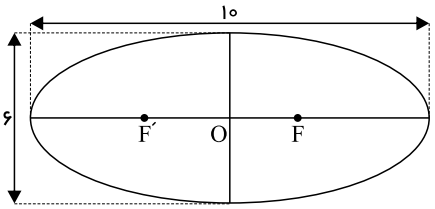
۱۶۷ کانون‌های یک بیضی نقاط $(5, 2)$ و $(-3, 2)$ و $a = 5$ است. مختصات مرکز و اندازهٔ قطر کوچک بیضی را پیدا کنید. ۱۳۹۹

۱۶۸ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. ۱۴۰۰

الف) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازهٔ نصف قطر بزرگ بیضی است.)

۱۶۹ در بیضی مقابل فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.) ۱۴۰۱



۱۷۰ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. ۱۴۰۱

الف فاصله کانونی را محاسبه کنید. ۱۴۰۱

ب مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید. ۱۴۰۱

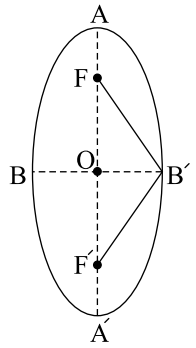
۱۷۱ در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. ۱۴۰۰

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴,۵)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

۱۷۲ در بیضی مقابل کانون‌ها به مختصات $F(۱,۵)$ و $F'(۱,۱)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(۱,۶)$ می‌باشد: ۱۴۰۲



الف فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ۱۴۰۲

ب معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید. ۱۴۰۲

پ مساحت مثلث $B'FF'$ را به دست آورید. ۱۴۰۲

۱۷۳ معادلهٔ قطر کانونی یک بیضی، $y = -۱$ و معادلهٔ قطر کوچک، $x = ۲$ است. اگر طول قطرهای بزرگ کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی را به دست آورید. ۱۴۰۳

۱۷۴ اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و طول قطر کوچک آن ۱۰ باشد آنگاه فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید. ۱۴۰۳

۱۷۵ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = ۵$ و $b = ۳$ در این صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی این بیضی را محاسبه کنید. ۱۳۹۸

۱۷۶ در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصلهٔ کانونی بیضی را به‌دست آورید. ۱۳۹۸

۱۷۷ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. ۱۳۹۹

الف فاصلهٔ کانونی و ممختصات مرکز بیضی را بنویسید. ۱۳۹۹

ب اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. ۱۳۹۹

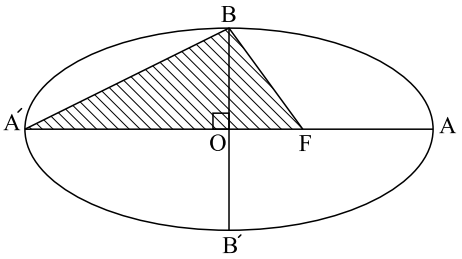
۱۷۸ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. ۱۴۰۰

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

۱۷۹ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. ۱۴۰۱

الف خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر ..... است. ۱۴۰۱

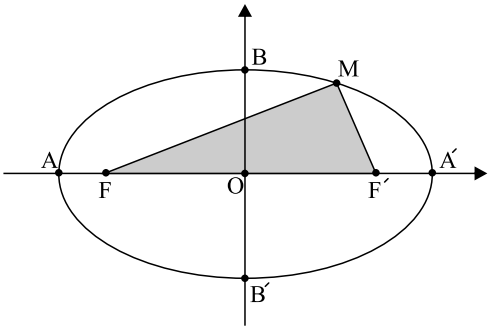
۱۸۰ اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به‌ترتیب ۱۰ و ۸ باشد: ۱۴۰۱



الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)

ب) مساحت مثلث هاشور خورده ($\overset{\Delta}{BFA'}$) چقدر است؟

۱۸۱ اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(۴,۰)$ و مختصات رأس $B(۰,۳)$ باشد: ۱۴۰۲



الف) قطر برگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث ($\overset{\Delta}{MFF'}$) را بیابید.

۱۸۲ مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط $(-۲,۱)$ و $(۶,۱)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $\frac{۱}{۲}$ باشد، فاصلهٔ کانونی آن را بیابید. ۱۴۰۲

۱۸۳ در یک بیضی فاصلهٔ کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید. ۱۴۰۳

۱۸۴ در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ ۱۳۹۸

دایره

۱۸۵ معادله گسترده دایرهٔ $C(O,R)$ به‌شکل $x^۲+y^۲+۲y-۴x-۴=۰$ است. ۱۴۰۱

الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.

ب) آیا نقطه $A(۰,۳)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

۱۸۶ معادلهٔ دایره‌ای به صورت $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید. ۱۴۰۳

۱۸۷ اگر مرکز دایره $x^۲+y^۲+ax-۴y-۴=۰$، نقطه $O(۱,۲)$ باشد. ۱۴۰۳

الف) مقدار a را بیابید.

ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

۱۸۸ معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به صورت $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید. ۱۳۹۸

۱۸۹ اگر معادلهٔ دایره به شکل $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ باشد: ۱۴۰۰

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها را پیدا کنید.

۱۹۰ معادلهٔ گسترده یک دایره به شکل $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۸=۰$ است. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بیابید. ۱۴۰۲

۱۹۱ وضعیت خط $x+y=۳$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ مشخص کنید. ۱۳۹۸

۱۹۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x+۴y=۱$ مماس بوده و مرکز آن $(۲,۱)$ باشد. ۱۳۹۹

۱۹۳ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ دایره را بنویسید. ۱۴۰۰

۱۹۴ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۰,۳)$ و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس باشد. ۱۴۰۱

۱۹۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۰,۳)$ و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس باشد. ۱۴۰۱

۱۹۶ وضعیت خط $x+y=3$ و دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید. ۱۴۰۰

۱۹۷ وضعیت خط $3x+4y=0$ را نسبت به دایره به معادله $(x-2)^2+(y+2)^2=9$ مشخص کنید. ۱۴۰۲

۱۹۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $(1,2)$ باشد. ۱۴۰۳

۱۹۹ وضعیت دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$ را نسبت به هم مشخص کنید. ۱۳۹۹

۲۰۰ وضعیت دو دایره به معادلات $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید. ۱۳۹۸

۲۰۱ اگر دو دایره به معادله‌های $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ و $(x-2)^2+(y+1)^2=m^2$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید. ۱۴۰۲

فصل هفتم: احتمال

احتمال شرطی و قانون ضرب احتمال‌ها (یازدهم)

۲۰۲ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم: ۱۴۰۲

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟ ۱۴۰۲

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟ ۱۴۰۲

۲۰۳ دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبهٔ دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵تای آنها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر سالم باشد؟ ۱۴۰۲

۲۰۴ در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. ۱۳۹۹

الف) اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی ..... خواهد بود. (بیضی- سهمی- هذلولی) ۱۳۹۹

ب) اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل ..... نزدیک خواهد شد. (پاره‌خط- دایره- نقطه) ۱۳۹۹

پ) دو پیشامد A و B را ..... گوییم هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل- ناسازگار- سازگار) ۱۳۹۹

ت) احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B رخ داده است، به صورت ..... نمایش داده می‌شود. ($P(B \mid A)$، $P(A \mid B)$، $P(A-B)$) ۱۳۹۹

پیشامدهای مستقل و ناسازگار (یازدهم)

۲۰۵ جمله‌های زیر را کامل کنید. ۱۴۰۲

الف) اگر $f(x)=-x^3$ آنگاه $f''(1)$ برابر است با ۱۴۰۲

ب) اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل ..... است. ۱۴۰۲

پ) هرگاه برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ آنگاه دو پیشامد A و B، ..... هستند. ۱۴۰۲

۲۰۶ در جاهای خالی گزینهٔ مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. ۱۳۹۸

الف) هرچه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد. ۱۳۹۸

ب) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد ..... (مستقل، ناسازگار) هستند. ۱۳۹۸

۲۰۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۱۳۹۹

الف) دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند هرگاه با هم رخ ندهند. ۱۳۹۹

۲۰۸ هریک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. ۱۴۰۳

الف دو پیشامد را ..... گوییم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. ۱۴۰۳

ب اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس نگذرد شکل حاصل را ..... می‌نامیم. ۱۴۰۳

قانون احتمال کل (نمودار درختی) (یازدهم)

۲۰۹ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟ ۱۳۹۸

۲۱۰ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ ۱۳۹۸

۲۱۱ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ ۱۳۹۸

۲۱۲ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه به‌ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟ ۱۳۹۹

۲۱۳ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰٫۰۸ و نوزاد دختر ۰٫۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ ۱۳۹۹

۲۱۴ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهرهٔ قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی آبی باشد چقدر است؟ ۱۴۰۰

۲۱۵ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰٫۰۸ و نوزاد دختر ۰٫۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ ۱۴۰۰

۲۱۶ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟ ۱۴۰۱

۲۱۷ چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز هستند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟ ۱۴۰۱

۲۱۸ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ آبی ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟ ۱۴۰۲

۲۱۹ ۴ ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که شامل ۴ مهرهٔ قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهرهٔ قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟ ۱۴۰۱

۲۲۰ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟ ۱۴۰۰

۲۲۱ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. ۱۴۰۲

الف اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و ..... $= C$ باشند، آنگاه A، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی است. ۱۴۰۲

۲۲۲ سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهرهٔ قرار دارد که ۳ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تای آنها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است. ۱۴۰۳

۲۲۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر «پشت» بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم و اگر «رو» بیاید ۲ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟ ۱۴۰۳

۲۲۴ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۰٫۰۷ و نوزاد دختر ۰٫۰۴ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟ ۱۳۹۹

۲۲۵ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟ ۱۴۰۳

پاسخنامه تشریحی

۱

الف a

ب d

پ b

۲

$$m_{AC} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{۲۴ - y_C}{۴ - ۳} = ۱٫۵$$

$$\longrightarrow ۲۴ - y_C = ۱٫۵ \longrightarrow y_C = ۲۲٫۵ \longrightarrow C \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۲۲٫۵ \end{matrix} \right.$$

$$m_{AB} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{۲۴ - y_B}{۴ - ۵} = ۱٫۵$$

$$\longrightarrow ۲۴ - y_B = -۱٫۵ \longrightarrow y_B = ۲۵٫۵ \longrightarrow B \left| \begin{matrix} ۵ \\ ۲۵٫۵ \end{matrix} \right.$$

مختصات نقطهٔ A هم طبق صورت سؤال $A \left| \begin{matrix} ۴ \\ ۲۴ \end{matrix} \right.$ است.

۳

$$\lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = \lim_{x \to -۱} \frac{۱ - ۲x^۲ - f(-۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{۱ - ۲x^۲ + ۱}{x + ۱}$$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{-۲x^۲ + ۲}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{-۲(x^۲ - ۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{-۲(x + ۱)(x - ۱)}{x + ۱}$$

$$= \lim_{x \to -۱} -۲(x - ۱) = -۲(-۲) = ۴$$

۴

الف ب (E)

ب الف (مثبت)

پ ب (کمتر)

۵

توجه کنید که $m_B = ۰$ است و $m_A < ۰$ و $m_C > m_D > ۰$ است.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

۶

$$\lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ - f(-۱)}{x - (-۱)} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ + ۳}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ + ۱}{x + ۱}$$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}{x + ۱} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

۷ $d = ۰$ و $b = ۰٫۵$ و $c = ۲$ و $a = -۰٫۵$ است.

۸

الف

دو نقطهٔ $\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix}$ را از روی نمودار در نظر بگیرید:

$$f'(۲)=\frac{۳-۱}{۲-۰}=۱$$

ب

$$y-۳=۱(x-۲)\Rightarrow y=x+۱$$

۹

الف درست؛ با توجه به تعریف واضح است.

ب نادرست؛ برای مثال تابع $f(x)=x^۲$ را در نظر بگیرید:

$$f(۰)=۰\ ,\ \ f'(x)=۲x\Rightarrow f'(۰)=۰$$

۱۰

الف) $A\begin{vmatrix}۱\\۰\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}\rightarrow f'(۱)=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{۰-۲}{۱-۰}=-۲$

ب) $m_C>m_B$

۱۱ مختصات نقطهٔ A به صورت $\begin{vmatrix}۴\\۲۵\end{vmatrix}$ است.

$$m_{AB}=\frac{۳}{۲}\rightarrow\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۳}{۲}\rightarrow\frac{۲۵-y_B}{۴-۵}=\frac{۳}{۲}\rightarrow ۲۵-y_B=\frac{-۳}{۲}\rightarrow y_B=۲۶/۵\rightarrow B\begin{vmatrix}۵\\۲۶/۵\end{vmatrix}$$

۱۲

$$m_A<m_{AB}=۰<m_B$$

۱۳

شیب	-۳	-۱	۰	۱
نقطه	E	B	D	A

۱۴

$$f'(x)=۳x^۲-۲\Rightarrow f'(۱)=۱\Rightarrow f(x)=x-۲\Rightarrow f(۱)=-۱$$

۱۵

الف $x=b$

ب $x=c$

۱۶

الف ب

ب پ

۱۷ الف) A

ب) C

۱۸

الف

$$\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=۲$$

ب

$m_A>m_B$

۱۹

x	a	b	c	d
$f'(x)$	$-۰/۵$	$۰/۵$	۲	۰

۲۰

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{x+h}-\frac{۱}{x}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{x(x+h)}=-\frac{۱}{x^{۲}}$$

۲۱ روش اول:

$$f'-(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(x^{۲}-۴)}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-۴$$

روش دوم:

$$f'-(۲)=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{|(۲+h)^{۲}-۴|-۰}{h}=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{|h^{۲}+۴h|}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{-(h^{۲}+۴h)}{h}=-۴$$

۲۲

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۵(f(x)-f(۲))}{x-۲}=۵f'(۲)\to f'(۲)=۲\to y=۲x-۱$$

۲۳

الف

$$y'=\frac{۲x(x^{۳}+۲x-۵)-(x^{۲}+۱)(۳x^{۲}+۲)}{(x^{۳}+۲x-۵)^{۲}}$$

۲۴

الف)

$$f(x)=\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۵}\to f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{۱(۲x-۱)-۲(x)}{(۲x-۱)^{۲}}\right)$$

ب)

$$g(x)=x^{۲}(\sqrt{x+۱})\to g'(x)=۲x(\sqrt{x+۱})+\frac{۱(۱)}{۲\sqrt{x+۱}}x^{۲}$$

۲۵ از مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم. $(y=uv\to y'=u'v+v'u)$

$$y=\frac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}\to y'=-\frac{۱}{x^{۲}}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}+۴(۲\sqrt{x}-۱)^{۳}(۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}))\frac{۱}{x}$$

۲۶

الف

$$f(x)=(x^{۴}-۳x)^{۵}\to f'(x)=۵(x^{۴}-۳x)^{۴}(۴x^{۳}-۳)$$

ب

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{۱-x}\to g'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-x)-(-۱)\sqrt{x}}{(۱-x)^{۲}}\to g'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-x)+\sqrt{x}}{(۱-x)^{۲}}$$

۲۷

الف) مشتق حاصل ضرب می باشد.

$(y=uv\to y'=uv'+v'u)$

$$f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)\to f'(x)=۳(x^{۲}+۱)^{۲}(۲x)(۵x-۱)+۵(x^{۲}+۱)^{۳}$$

ب)

$$g(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}\to g'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$$

۲۸

الف

$$f'(x)=۴(۲x^۳+\sqrt[۳]{x}-۱)^۳(۶x^۲+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})$$

۲۹

الف

می‌دانیم:

$$(\frac{u}{V})'=\frac{u'\cdot V-V'\cdot u}{V^۲},\ (u^n)'=n\cdot u'\cdot u^{n-۱}$$

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۳+۲x+۱)-(x^۲-۱)(۳x^۲+۲)}{(x^۳+۲x+۱)^۲}$$

۳۰

الف

$$(۲f+۳g)'(۲)=۲f'(۲)+۳g'(۲)\xrightarrow{f'(۲)=-۱,g'(۲)=۳}-۲+۹=۷$$

۳۱

الف) $y'=\frac{۲(x^۳-۲x^۲)-(۳x^۲-۴x)(۲x+۳)}{(x^۳-۲x^۲)^۲}$

ب) $y'=۳\times ۲\sin^۲(۲x+۱)\cos(۲x+۱)$

۳۲

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^۲(x)}\Rightarrow h'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-f(۱)g'(۱)}{g^۲(۱)}=\frac{۲\times ۳-(۲)(-۱)}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

۳۳

الف

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^۲-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^۲}$$

ب

$$g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲+۵)+\sqrt{x}(۶x)$$

۳۴

الف

$$f(x)=(\frac{-۳x+۱}{x^۲+۵})^۸$$

$$f'(x)=۸(\frac{-۳x+۱}{x^۲+۵})^۷(\frac{-۳(x^۲+۵)-۲x(-۳x+۱)}{(x^۲+۵)^۲})$$

ب

$$g(x)=\frac{۱}{x}(\sqrt{۳x+۲})$$

$$g'(x)=\frac{-۱}{x^۲}(\sqrt{۳x+۲})+\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۳x+۲}}(\frac{۱}{x})$$

۳۵

الف

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{\sqrt{x}}\rightarrow f'(x)=\frac{۳\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x+۱)}{x}$$

ب

$$g(x)=(\frac{۱}{x})(x^۲+۵x)^۷\rightarrow g'(x)=\frac{-۱}{x^۲}(x^۲+۵x)^۷+۷(x^۲+۵x)^۶(۲x+۵)(\frac{۱}{x})$$

۳۶ الف) $f'(x)=\left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\right)(x^۳+۱)+(۳x^۲)(\sqrt{۳x+۲})$

ب) $g'(x)=۷(۲x+۳)(x^۲+۳x+۱)^۶$

پ) $h'(x)=\frac{(۲x-۵)(-۲x+۹)-(-۲)(x^۲-۵x+۷)}{(-۲x+۹)^۲}$

۳۷ الف)

$f(x)=(۱۲x^۲)(۲x-۱)^۴+۴(۲x-۱)^۳(۲)(۴x^۳-۷)$

۳۸ الف)

$f(x)=\left(\frac{x^۲}{۳x-۱}\right)^۵ \rightarrow f'(x)=۵\left(\frac{x^۲}{۳x-۱}\right)^۴\left(\frac{۲x(۳x-۱)-۳x^۲}{(۳x-۱)^۲}\right)$

ب)

$g(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱) \rightarrow g'(x)=\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^۳+۱)+۳x^۲(\sqrt{۳x+۲})$

۳۹ الف) $f'(x)=\left(\frac{۹\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲}\right)$

ب) $g'(x)=(۶x)(۲x-۵)^۳+(۳)(۲)(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۴)$

۴۰ الف)

$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}(۲x^۳-۱)+(\sqrt{۳x}+۱)(۶x^۲)$

ب)

$h'(x)=\frac{(۲x-۳)(۵x)-(۵)(x^۲-۳x)}{(۵x)^۲}$

۴۱ $(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲)g'(۲)=۵\times ۸+۳(-۶)=۲۲$

۴۲ $f'(x)=\frac{\frac{۹(x+۱)-۱(۹x-۲)}{(x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}$

۴۳ الف)

$f'(x)=\frac{-۲(x+۴)-۱(-۲x+۳)}{(x+۴)^۲}$

ب)

$g'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(x^۲+۲x)+(۲x+۲)(\sqrt{۳x+۱})$

۴۴ الف) $f(x)=x^۳-x \rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱$

ب) $g(x)=۳(\frac{۲x-۱}{x+۱})^{۲}(\frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۱)}{(x+۱)^{۲}})$

۴۵

الف

$f'(x)=۵(x^{۲}+۲x-۱)^{۴}(۲x+۲)$

ب

$g'(x)=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^{۳}+۱)+(\sqrt{۳x+۲})(۳x^{۲})$

۴۶

$۳f'(۱)+۲g'(۱)=۹+۱۰=۱۹$

۴۷

الف

$f'(x)=۵(x^{۲}+۲x+۱)^{۴}(۲x+۲)$

ب

$$g'(x)=\frac{(۱)(\sqrt{۳x+۲})-\frac{۳x}{۲\sqrt{۳x+۲}}}{(\sqrt{۳x+۲})^{۲}}$$

۴۸

الف

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۴)+۳x^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$$

ب

$$g'(x)=\frac{(-۱۴x)(x-۶)-(۱)(-۷x^{۲}+۱)}{(x-۶)^{۲}}$$

پ

$h'(x)=۴(۲x^{۵}-۱)^{۳}(۱۰x^{۴})$

۴۹

الف

$$g'(x)=\frac{۴\times۲\times(۲x-۱)^{۳}(x^{۳}+۸)-۳x^{۲}(۲x-۱)^{۴}}{(x^{۳}+۸)^{۲}}$$

ب

$$f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x+۱)^{۲}}}$$

۵۰

$$f'(x)=۳(x-۶)^{۲}+\frac{۵(\sqrt{۲x-۱})-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}(۵x+۳)}{\sqrt{(۲x-۱)^{۲}}}$$

۵۱

$$h'(x)=۶\left(\frac{\sqrt{۱-۳x}}{۷+x}\right)^{۵}\left(\frac{(\frac{-۳}{۲\sqrt{۱-۳x}})(۷+x)-(۱)(\sqrt{۱-۳x})}{(۷+x)^{۲}}\right)$$

۵۲

$(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲)g'(۲)=۱\times(-۳)+۳\times۲=۳$

$(f+g)'(۲)=f'(۲)+g'(۲)=۳$

۵۳

الف

$f'(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}})(x^۴-۲x)+(۴x^۳-۲)(۲\sqrt{x}+۱)$

ب

$g'(x)=\frac{۳(x^۵-x+۱)-(۵x^۴-۱)(۳x+۱)}{(x^۵-x+۱)^۲}$

۵۴

$f'(x)=-۲x+۱۰\ ,f'(۲)=۶\ ,\ \ f(۲)=۱۶$

در نتیجه $A(۲,۱۶)$ است و شیب برابر ۱۶ است؛ پس معادلهٔ خط برابر است با:

$y-y_A=f'(۲)(x-x_A)\Rightarrow y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

۵۵

$f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=-۱$

۵۶

$\frac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳}=۱٫۵\Rightarrow ۲۴-f(۳)=۱٫۵\Rightarrow f(۳)=۲۲٫۵\Rightarrow B(۳,۲۲٫۵)$

$\frac{f(۵)-f(۴)}{۵-۴}=۱٫۵\Rightarrow f(۵)-۲۴=۱٫۵\Rightarrow f(۵)=۲۵٫۵\Rightarrow ,\ C(۵,۲۵٫۵)$

۵۷

$\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-f(۲)g(x)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}g(x)\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}g(x)\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۵f'(۲)$

۵۸

$f'(x)=-۲x+۶\to f'(۲)=۲$

$d:(۲,۳),(a,۰):۲=\frac{۰-۳}{a-۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$

۵۹

روش اول:

فرض کنیم $y=ax+b$، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(۲,۴)$ واقع بر آن باشد:

$\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۳\Rightarrow f'(۲)=۳\Rightarrow a=۳$

$y=۳x+b\xrightarrow{(۲,۴)}b=-۲\Rightarrow y=۳x-۲$

روش دوم:

$\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۳\Rightarrow f'(۲)=۳\Rightarrow m=۳$

$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow{(۲,۴)}y-۴=۳(x-۲)$

۶۰

الف

آهنگ متوسط در بازه $[۰,۲]=\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۲-۰}{۲}=۱$

ب

آهنگ لحظه‌ای $=f'(x)=۲x-۱\Rightarrow ۲x-۱>۱\Rightarrow x>۱$

۶۱

الف نادرست

ب نادرست

علت: $f'(x)=۳x^۲-۳>۰\to ۳x^۲>۳\to x^۲>۱\to x>۱$ یا $x<-۱$

۶۲

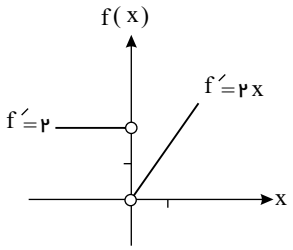
الف

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} x^۲ = ۰$$
$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (۲x+۱) = ۱$$
$\rightarrow$ تابع در $x = ۰$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

ب

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & x > ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases}$$

پ



۶۳ کافی است نشان دهیم $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$$

$$= ۰ \times f'(a) = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

۶۴ تابع f در $x = a$ وقتی مشتق‌پذیر است که تابع در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

پیوستگی:
$$\begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x^۲+x) = ۱+۱ = ۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۳x-۱) = ۳-۱ = ۲ \\ f(۱) = ۱+۱ = ۲ \end{cases}$$
$\rightarrow$ تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

مشتق‌های راست و چپ:
$$\begin{cases} f'(۱^+) = ۲x+۱ = ۲(۱)+۱ = ۳ \\ f'(۱^-) = ۳ \end{cases}$$

با توجه به پیوسته بودن و تساوی مشتق‌های راست و چپ، تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

۶۵

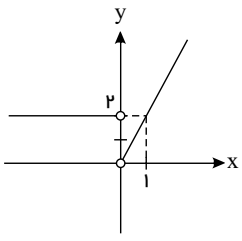
الف در X=۰ مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند (نقطهٔ گوشه)، بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(۰^+) = ۲x = ۰ \\ f'(۰^-) = ۲$$
$\rightarrow f'(۰^+) \neq f'(۰^-)$

ب

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۰ \\ ۲x & x > ۰ \end{cases}$$

پ



۶۶ برای محاسبهٔ مشتق راست سراغ ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ مشتق چپ سراغ ضابطهٔ بالا می‌رویم.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۰ \rightarrow f(x) = x \rightarrow f'_+(۰) = ۱ \\ x < ۰ \rightarrow f(x) = x^۲ \rightarrow f'(x) = ۲x \rightarrow f'_-(۰) = ۰ \end{array}\right\} \rightarrow f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$$

۶۷ تابع در $x=۱$ پیوسته است، زیرا: $f_+(۱)=f_-(۱)=f(۱)=۴$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(۱)&=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۳-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\ f'_-(۱)&=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳x+۱-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳x-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳(x-۱)}{x-۱}=۳\end{aligned}\right\}\to f'_-(۱)\neq f'_+(۱)$$

بنابراین تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

۶۸ تابع داده شده در $x=-۲$ پیوسته است. $(\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=f(-۲)=۰)$

$$\lim_{x\to x_۰^+}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|-\overset{۰}{\overbrace{f(-۲)}}}{x-(-۲)}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{\overset{-}{\overbrace{|x^۲-۴|}}}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x+۲)(x-۲)}{(x+۲)}=۴$$

$$\lim_{x\to x_۰^-}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{|x^۲-۴|-\overset{۰}{\overbrace{f(-۲)}}}{x-(-۲)}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{\overset{+}{\overbrace{|x^۲-۴|}}}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(x+۲)(x-۲)}{(x+۲)}=-۴$$

چون مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند، تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۶۹

الف پیوسته

۷۰ تابع پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}f(x)=f(۰)=۰$$

حال مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} f'_-(۰)&=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=۰\\ f'_-(۰)&=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۰}{x-۰}=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'_-(۰)=f'_+(۰)\Rightarrow$$ پس تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۷۱

$\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+۱)=\lim_{x\to ۱^-}۲x=۲=f(۱)$ تابع پیوسته است.

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۱-۲}{x-۱}=۲\ ,\ f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x-۲}{x-۱}=۲$$

$\Rightarrow f'_+(۱)=f'_-(۱)=۲$ تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است.

۷۲

$$f'(۰^+)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^+}x=۰$$
$$f'(۰^-)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱$$

مشتق‌های راست و چپ تابع در $x=۰$ با هم برابر نیستند، بنابراین تابع در $x=۰$ مشتق ناپذیر است.

۷۳

$$y=\begin{cases}۱ & x\le ۱\\ \frac{۱}{x} & x>۱\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}۰ & x<۱\\ \frac{-۱}{x^۲} & x>۱\end{cases}\ ,\ y'_-(۱)\neq y'_+(۱)$$

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۷۴ تابع f در نقطه $x=۰$ پیوسته است.

$$\left.\begin{aligned} f'_+(۰)&=۳\\ f'_-(۰)&=a\end{aligned}\right\}\to a=۳$$

۷۵

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}=۲\Rightarrow y-۰=۲(x-۱)$$

۷۶

الف خیر

ب بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, ۲)$ مشتق‌پذیر است.

پ

$$x \geq ۲ : f(x) = \sqrt{x-۱} + ۲ \rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}} \rightarrow f'_+(۲) = \frac{۱}{۲}$$

۷۷ تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

$$\begin{matrix} f'_+(-۱) = \lim\limits_{x \to -۱^+} \dfrac{x^۲ + ۳ - ۴}{x - (-۱)} = -۲ \\ f'_-(-۱) = \lim\limits_{x \to -۱^-} \dfrac{۲x + ۶ - ۴}{x - (-۱)} = ۲ \end{matrix} \Rightarrow f'_+(-۱) \neq f'_-(-۱)$$

$f'(-۱)$ موجود نیست.

۷۸ تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x - ۰}{x - ۰} = ۱$$

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲ - ۰}{x - ۰} = ۰$$

$f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$ پس مشتق تابع در $x = ۰$ موجود نیست.

۷۹

الف نادرست

۸۰ روش اول: در $x = ۲$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x & x < ۲ \\ ۲\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\right) & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow f'_+(۲) = ۱, f'_-(۲) = ۸$$

پس در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.

روش دوم:

$$\begin{cases} f'_+(۲) = \lim\limits_{x \to ۲^+} \dfrac{(۲\sqrt{x-۱} + ۶) - ۸}{x - ۲} = ۱ \\ f'_-(۲) = \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{(۲x^۲) - ۸}{x - ۲} = ۸ \end{cases}$$

در $x = ۲$ پیوسته است.

پس در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۸۱ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{|x-۲| - ۰}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x-۲}{x-۲} = ۱ \quad , \quad f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-(x-۲)}{x-۲} = -۱$$

۸۲ نقطهٔ گوشه، نقطه‌ای در دامنهٔ تابع است که تابع در آن پیوسته است اما مشتق چپ و راست دو عدد مختلف هستند یا یکی عدد و دیگری ∞ باشد. تابع f در $x = -۱$ پیوسته است.

$$f'_+(-۱) = \lim_{x \to (-۱)^+} \frac{|x^۲ + x|}{x + ۱} = \lim_{x \to (-۱)^+} \frac{-x(x+۱)}{x + ۱} = ۱$$

$$f_-(-۱) = \lim_{x \to (-۱)^-} \frac{x(x+۱)}{x + ۱} = -۱$$

مشتق‌های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابرهستند. پس $x = -۱$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع است.

۸۳ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق چپ و راست را جداگانه در نقطهٔ $x = ۲$ به دست می‌آوریم؛ داریم:

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{|x^۲ - ۴| - ۰}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x - ۲} = ۴$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-۴$$

$$\Rightarrow f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$$

بنابراین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۸۴ با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\left.\begin{aligned}f'_+(۱)&=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\ f'_-(۱)&=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=-۲\end{aligned}\right\}\to f'_-(۱)\neq f'_+(۱)\to$$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

۸۵ با توجه به شکل تابع در نقطهٔ A پیوسته است، با توجه به تعریف مشتق در نقطهٔ A داریم:

$$\left.\begin{aligned}f'_+(۱)&=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{x-۱}=-۱\\ f'_-(۱)&=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱-۱}{x-۱}=۰\end{aligned}\right.\Rightarrow f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$$

$f'(۱)$ موجود نیست.

۸۶

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲t\to m'(۹)=\frac{۱۰۹}{۶}$$

۸۷

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{x(۴)-x(۳)}{۴-۳}=\frac{(\sqrt{۴}+۱۲۸)-(\sqrt{۳}+۵۴)}{۱}=۷۶-\sqrt{۳}$$

۸۸

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$f'(x)=۳x^۲-۲\Rightarrow f'(۱)=۱\ \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}$$

۸۹

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۴}}{۵}=\frac{۳-۲}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

۹۰

$$\left.\begin{aligned}\text{سرعت متوسط}&=\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{۲۸-۰}{۴}=۷\\ \text{سرعت لحظه‌ای}&=f'(t)=۴t-۱\end{aligned}\right\}\to ۴t-۱=۷\to t=۲$$

۹۱

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵-۰}=\frac{(۳۵+۵۰)-(۰+۵۰)}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

۹۲

الف درست

سرعت لحظه‌ای: $f'(t)=۲t+۳\overset{t=۲}{=\!=}۷$

۹۳

$$f(۵)=۳۰\ ,\ f(۰)=۱۰\Rightarrow \text{سرعت متوسط}:\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای}: f'(t)=۲t-۱=۴\Rightarrow t=\frac{۵}{۲}$$

۹۴

الف

$m(۴) - m(۱) = (۲ + ۱۲۸) - (۱ + ۲) = ۱۲۷$

توجه داشته باشید که میزان افزایش جرم خواسته شده است و نه آهنگ تغییر جرم. بنابراین فقط جرم ثانویه را منهای جرم اولیه می‌کنیم.

ب

$$m(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳ \to m'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}} + ۶t^۲$$

$$\to m'(۴) = \frac{۱}{۴} + ۹۶ = ۹۶٫۲۵$$

۹۵

$$d(t) = -۵t^۲ + ۲۰t \to d'(t) = -۱۰t + ۲۰ \to d'(۲) = -۲۰ + ۲۰ = ۰$$

۹۶

الف سرعت لحظه‌ای در $t = ۹$ برابر است با:

$$f'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}}$$

$t = ۹$ سرعت لحظه‌ای : $f'(۹) = \frac{۱}{۲\sqrt{۹}} = \frac{۱}{۶}$

۹۷

$$f'(t) = -۴t + ۱۰ \Rightarrow f'(۲) = -۸ + ۱۰ = ۲$$

۹۸

$$[۰, ۵] \text{ سرعت متوسط در } = \frac{f(۵) - f(۰)}{۵ - ۰} = \frac{(۲۵ - ۵ + ۱۰) - ۱۰}{۵} = ۴$$

سرعت لحظه‌ای $= ۲t - ۱$

طبق فرض : $۲t - ۱ = ۴ \to ۲t = ۵ \to t = \frac{۵}{۲}$

۹۹ الف)

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(۸) - h(۵)}{۸ - ۵} = \frac{۰ - (۷۵)}{۸ - ۵} = -۲۵$$

ب)

$$h'(t) = -۱۰t + ۴۰ = ۳۵ \Rightarrow t = ۰٫۵$$

۱۰۰ الف)

$$\frac{h(۲) - h(۱)}{۲ - ۱} = ۲۵ \quad \text{(سرعت متوسط)}$$

ب)

$$h'(t) = -۱۰t + ۴۰ \Rightarrow h'(۳) = ۱۰ \quad \text{سرعت لحظه‌ای}$$

۱۰۱

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(۵) - f(۰)}{۵ - ۰} = \frac{۳۰ - ۱۰}{۵} = ۴$$

$$f'(t) = ۲t - ۱ \to f'(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$$

۱۰۲

$$\text{آهنگ متوسط رشد} = \frac{f(۲۵) - f(۰)}{۲۵ - ۰} = \frac{۸۵ - ۵۰}{۲۵} = \frac{۷}{۵}$$

۱۰۳

$$\text{الف) سرعت متوسط} = \frac{h(۴) - h(۲)}{۴ - ۲} = \frac{۹۶ - ۶۴}{۲} = ۱۶$$

$$\text{ب) } h'(t) = -۸t + ۴۰ = ۱۶ \to t = ۳$$

۱۰۴

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(۵) - f(۰)}{۵ - ۰} = ۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = ۲t - ۱ = ۴ \qquad t = \frac{۵}{۲}$$

۱۰۵ الف)

آهنگ تغییر متوسط $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲۵) - f(۰)}{۲۵ - ۰} = \frac{۸۵ - ۵۰}{۲۵} = \frac{۷}{۵}$

ب)

آهنگ لحظه‌ای $f'(۴۹) = \frac{۷}{۲\sqrt{x}} = \frac{۷}{۲\sqrt{۴۹}} = \frac{۱}{۲}$

۱۰۶

$f'(x) = ۴x + ۵ \Rightarrow f'(۲) = ۱۳$

$\frac{f(۰) - f(-۲)}{۰ - (-۲)} = \frac{۱ - (-۱)}{۲} = ۱$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = ۱۲$، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲, ۰]$ است.

۱۰۷

$f'(t) = ۲t + ۲$

آهنگ متوسط $= \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۱۱ - ۳}{۲} = ۴$ $\qquad ۲t + ۲ = ۴ \rightarrow t = ۱$

۱۰۸

الف

$\frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱} = ۱۵$

ب

$f'(t) = ۶t^۲ + ۱ \rightarrow f'(۲) = ۲۵$

۱۰۹

آهنگ لحظه‌ای : $۲۰(۲)(۱ - \frac{t}{۵۰})(-\frac{۱}{۵۰})$ یا $-\frac{۴}{۵}(۱ - \frac{t}{۵۰})$

آهنگ متوسط $= \frac{۰ - ۲۰}{۵۰ - ۰} = \frac{-۲}{۵}$

از برابری آهنگ متوسط و لحظه‌ای نتیجه می‌گیریم $t = ۲۵$

۱۱۰

$f'(x) = ۲x^۲ - x - ۱۵ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -\frac{۵}{۲} \end{cases}$

x		$-\frac{۵}{۲}$		۳	
f'	+	۰	−	۰	+
f	↗	max	↘	min	↗

۱۱۱

طول مینیمم نسبی $= ۲$ $\qquad$ طول ماکزیمم نسبی $= ۳$

طول مینیمم مطلق $= ۴$ $\qquad$ طول ماکزیمم مطلق $= ۱$

۱۱۲

الف نادرست

ب درست

۱۱۳

الف درست

۱۱۴

الف درست

ب درست

۱۱۵ ابتدا نقاط بحرانی را محاسبه نموده و در تابع قرار می‌دهیم و سپس با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۴}} \xrightarrow{f'=۰} x=۱$$

مقدار ماکزیمم مطلق: $f(۰)=f(۲)=۲$

مقدار مینیمم مطلق: $f(۱)=\sqrt{۳}$

۱۱۶

$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ابتدای بازه}: f(-۱)=۱۳ \\ f(۱)=-۷ \\ \text{انتهای بازه}: f(۳)=۴۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \min f:(۱,-۷) \ , \ \max f:(۳,۴۵)$$

۱۱۷

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

$$f(۱)=-۱\ ,\ f(-۱)=۳,\ f(۲)=۳ \Rightarrow \begin{cases} \max f(۳)=۳ \\ \min f(x)=-۱ \end{cases}$$

۱۱۸

$$f'(x)=۳x^۲-۶x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲\notin[-۱,۱] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۱)=-۱ \\ f(۰)=۱ \quad (max) \\ f(-۱)=-۳ \quad (min) \end{cases}$$

۱۱۹

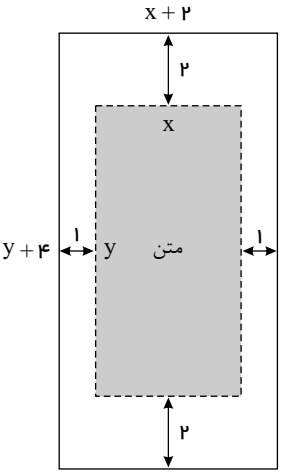
$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲=۰ \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲\notin[-۱,۳] \end{cases}$$

$$f(-۱)=۱۳$$
$$f(۱)=-۷ \quad \Rightarrow \min(۱,-۷)$$
$$f(۳)=۴۵ \quad \Rightarrow \max(۳,۴۵)$$

۱۲۰

$$f(x)=x^۳-۳x+۷ \rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(-۱)=-۱+۳+۷=۹ \\ f(۳)=۲۷-۹+۷=۲۵ \rightarrow \text{مطلق} max \\ f(۱)=۱-۳+۷=۵ \rightarrow \text{مطلق} min \end{cases}$$

۱۲۱



دومتغیره: $S=(x+۲)(y+۴)=xy+۴x+۲y+۸$

مساحت متن $=۳۲ \rightarrow xy=۳۲ \rightarrow y=\frac{۳۲}{x}$

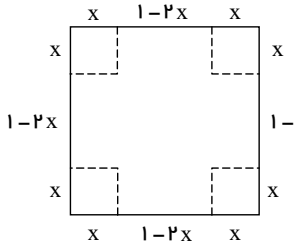
پس: $S=x(\frac{۳۲}{x})+۴x+۲(\frac{۳۲}{x})+۸=۳۲+۴x+\frac{۶۴}{x}+۸$

یک‌متغیره: $=۴۰+۴x+\frac{۶۴}{x} \xrightarrow{S'=۰} ۴-\frac{۶۴}{x^۲}=۰$

$$\rightarrow \frac{۶۴}{x^۲}=۴ \rightarrow x^۲=۱۶ \rightarrow x=۴ \xrightarrow{y=\frac{۳۲}{y}} y=۸$$

بنابراین ابعاد صفحه باید ۶ و ۱۲ باشد

۱۲۲



$\rightarrow V_{\text{جعبه}}=$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

$$V=(۱-۲x)^۲\cdot x=(۱+۴x^۲-۴x)x=۴x^۳-۴x^۲+x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۱۲x^۲-۸x+۱=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶} \begin{cases} x=\dfrac{۸+۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x=\dfrac{۸-۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۶} \end{cases}$$

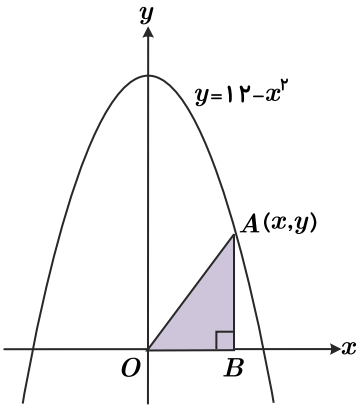
۱۲۳

$$h=\frac{۳۰۰}{r^۲} \quad S=\frac{۱۸۰۰}{r}+۳r^۲ \quad S'=\frac{-۱۸۰۰}{r^۲}+۶r=۰$$
$$r=\sqrt[۳]{۳۰۰} \Rightarrow h=\sqrt[۳]{۳۰۰}$$

۱۲۴

$$S_{\underset{OAB}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x(۱۲-x^۲)=۶x-\frac{۱}{۲}x^۳ \Rightarrow S'(x)=۶-\frac{۳}{۲}x^۲$$
$$۶-\frac{۳}{۲}x^۲=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۲ \Rightarrow y=۱۲-۴=۸$$

x	۰		۲		$\sqrt{۱۲}$
$s'(x)$		+	۰	−	
$s(x)$		↗	۸	↘	



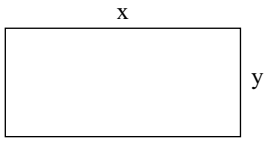
۱۲۵

$$۲a+b=۶۰ \to b=۶۰-۲a$$
$$ab=a(۶۰-۲a)=۶۰a-۲a^۲ \xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۶۰-۴a=۰ \to a=۱۵ \ , \ b=۳۰$$

۱۲۶

$$x-y=۲۰ \to y=x-۲۰$$
$$xy=x(x-۲۰)=x^۲-۲۰x \quad \text{یک متغیره} \xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۲x-۲۰=۰ \to x=۱۰ \xrightarrow{y=x-۲۰} y=-۱۰$$

۱۲۷



$S=xy$: **دو متغیر**

محیط $=۱۴ \to ۲x+۲y=۱۴ \to x+y=۷ \to y=۷-x$

پس : $S=x(۷-x)=-x^۲+۷x$: **یک متغیر** $\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} -۲x+۷=۰ \to x=\dfrac{۷}{۲} \xrightarrow{y=۷-x} y=۷-\dfrac{۷}{۲}=\dfrac{۷}{۲}$

۱۲۸

$$y=۷-x \to S=(y)(x)=۷x-x^۲ \to S'(x)=۷-۲x=۰ \to x=۳٫۵ \ , \ y=۳٫۵$$

۱۲۹

$$p=xy=۵x^۲-۱۰x \to p'(x)=۰ \to ۱۰x-۱۰=۰ \to \begin{matrix} x=۱ \\ y=-۵ \end{matrix}$$

۱۳۰

$y = ۸ - x \Rightarrow S(x) = -x^۲ + ۸x \Rightarrow S'(x) = -۲x + ۸ = ۰$

$x = ۴ \quad , \quad y = ۴$

۱۳۱

$۲h + ۲r + \pi r = ۶ \Rightarrow h = \dfrac{۶ - ۲r - \pi r}{۲}$

$S(r) = ۶r - ۲r^۲ - \dfrac{۱}{۲}\pi r^۲ \Rightarrow S'(r) = ۶ - ۴r - \pi r$

$۶ - ۴r - \pi r = ۰ \Rightarrow r = \dfrac{۶}{۴ + \pi}$

r		$\frac{۶}{۴+\pi}$	
S′		− ۰	+
S		↗	↘

$h = \dfrac{۶ - (۲ + \pi)\dfrac{۶}{۴ + \pi}}{۲} = \dfrac{۶}{۴ + \pi}$

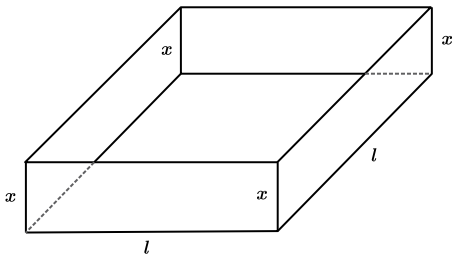
۱۳۲

$x - y = ۸ \Rightarrow x = ۸ + y$

$s = xy = (۸ + y)y = y^۲ + ۸y$

$s' = ۲y + ۸ = ۰ \begin{cases} y = -۴ \\ x = ۴ \end{cases}$

۱۳۳



$v = xl^۲$

$۲x + l = ۳۰ \rightarrow l = ۳۰ - ۲x \rightarrow v = x(۳۰ - ۲x)^۲$ یا $۴x^۳ - ۱۲۰x^۲ + ۹۰۰, x \in [۰, ۱۵]$

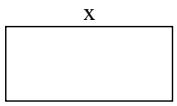
$v'(x) = (۳۰ - ۲x)^۲ + ۲(-۲)(۳۰ - ۲x)x = ۰$ یا $v'(x) = ۱۲x^۲ - ۲۴۰x + ۹۰۰ = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = ۱۵ \end{cases}$

x		۰		۵		۱۵
v'			+	۰	−	۰
v		۰	↗	۲۰۰۰	↘	۰

بیشترین حجم برای $x = ۵$ به دست می‌آید.

۱۳۴



محیط $= ۲۴ \rightarrow ۲(x + y) = ۲۴ \rightarrow x + y = ۱۲ \rightarrow y = ۱۲ - x$

$S = xy = x(۱۲ - x) = ۱۲x - x^۲ \xrightarrow{S'=۰} ۱۲ - ۲x = ۰ \to x = ۶, y = ۶$

۱۳۵

$x - y = ۱۰ \to y = x - ۱۰$

$xy = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x \xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۲x - ۱۰ = ۰ \to x = ۵ \ , \ y = -۵$

۱۳۶

$x - y = ۱۰$

$p = xy = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x$

$p'(x) = ۲x - ۱۰ = ۰ \to x = ۵ \ , \ y = -۵$

۱۳۷

$f'(x) = ۳x^۲ - ۲۷ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۳$

$(-\infty, -۳], [۳, +\infty)$ اکیداً صعودی

x		-۳		۳	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+

۱۳۸

$f'(x) = \dfrac{۲x}{(x^۲ + ۱)^۲} \xrightarrow{f'(x)=۰} x = ۰$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		−	۰	+	
f		↘	۰	↗	

پس تابع در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ نزولی و در بازهٔ $(۰, +\infty)$ صعودی است.

۱۳۹

الف

$f(x) = x^۳ - ۳x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \Rightarrow f'(x) \le ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳ \le ۰ \Rightarrow ۳x^۲ \le ۳ \Rightarrow x^۲ \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$

$(-۱, ۱)$ یا $[-۱, ۱]$

ب ۲

۱۴۰

$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} x = ۲ \ , \ x = -۲$

اکیداً صعودی $(-\infty , -۲) , (۲ , +\infty)$

x		-۲		۲	
f′	+	۰	−	۰	+
f	↗		↘		↗

۱۴۱

x		-۱		$+۱$	
f′(x)	−	•	−	•	+
		↗		↘	↗

$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

$(-\infty, -۱)$, $(۱, +\infty)$ اکیداً صعودی

$(-۱, +۱)$ اکیداً نزولی

۱۴۲

$f'(x) = -۶x^۲ + ۶ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

x		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗		↘

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکید است.

۱۴۳

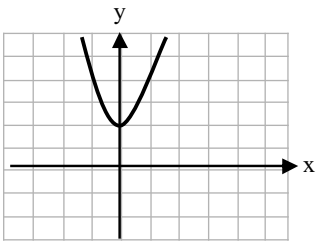
الف

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

ب مثبت

۱۴۴ نمودار $f(x) = x^2 + 2$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار داریم:

اکیداً صعودی: $(0, +\infty)$, اکیداً نزولی: $(-\infty, 0)$



۱۴۵ درست

۱۴۶

$$f'(2) = 0 \to f'(x) = 3x^2 + 2bx \to b = -3$$
$$f(2) = 1 \to 8 + (-12) + d = 1 \to d = 5$$

۱۴۷ نقطهٔ اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر، در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق را صفر می‌کند.

$$f(2) = 1 \to 8 + 4b + d = 1 \to 4b + d = -7$$
$$f'(2) = 0 \xrightarrow{f'(x)=3x^2+2bx} 0 = 12 + 4b \to b = -3 \ , \ d = 5$$

۱۴۸

$$f'(x) = -4x^3 + a \xrightarrow{f'(1)=0} -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + 4 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$

۱۴۹

الف) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \to f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	20 Max	↘	-7 Min	↗	$+\infty$

ب) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \to \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \to \left\| \begin{matrix} 1 \\ -7 \end{matrix} \right. \text{ نقطهٔ بحرانی} \\ x = -2 \text{ (در بازه نیست) غ ق ق} \end{cases}$

پس : $\begin{cases} f(-1) = -2 + 3 + 12 = 13 \\ f(3) = 54 + 27 - 36 = 45 \to \text{مطلق } Max \to \left\| \begin{matrix} 3 \\ 45 \end{matrix} \right. \\ f(1) = 2 + 3 - 12 = -7 \to \text{مطلق } Min \to \left\| \begin{matrix} 1 \\ -7 \end{matrix} \right. \end{cases}$

۱۵۰

$$f'(x) = x^۲ + ۲x \xrightarrow{f'=۰} x = ۰\ ,\ x = -۲$$

$$\Rightarrow f(-۲) = \frac{۴}{۳}\ ,\ f(۰) = ۰ \text{ مینیمم مطلق}\ ,\ f(۳) = ۱۸ \text{ ماکزیمم مطلق}$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر داریم:

x	-۲		۰		۳
f'	۰	$-$	۰	$+$	
f	$\frac{۴}{۳}$	$\searrow$	۰	$\nearrow$	۱۸

$\rightarrow f(۰) = ۰$ مینیمم نسبی

۱۵۱ الف)

$$f(x) = x^۳ - ۳x + ۴ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۶ Max	$\searrow$	۲ Min	$\nearrow$	$+\infty$

ب)

$g'(x) = ۳x^۲ + ۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = -\frac{۲}{۳}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$\rightarrow \begin{cases} g(-۲) = -۸ - ۴ - ۵ = -۱۷ : \text{مطلق } Min \\ g(۱) = ۱ + ۲ - ۵ = -۲ : \text{مطلق } Max \end{cases}$$

۱۵۲ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند:

۱) در تابع صدق می‌کنند.

۲) طولشان مشتق را صفر می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۱ \\ ۷\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۷ = a + b$$

$$\left|\begin{matrix}۱ \\ ۷\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طولش مشتق را صفر می‌کند.}} f'(x) = ۲ax + b \rightarrow ۰ = ۲a + b$$

پس: $\begin{cases} a + b = ۷ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \rightarrow a = -۷\ ,\ b = ۱۴$

۱۵۳

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{c}{a} = -۳ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۱۷ Max	$\searrow$	-۱۵ Min	$\nearrow$	$+\infty$

۱۵۴

الف

$$f(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$$

$$\rightarrow f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{a+b=c} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{-۱۲}{-۶} = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۶ Min	$\nearrow$	۱۱ Max	$\searrow$	$-\infty$

ب

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ (غ ق ق (در بازه قرار ندارد.} \\ x = ۲ \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f(۰) = -۹ \rightarrow \text{مطلق } Min \\ f(۳) = ۰ \\ f(۲) = ۱۱ \rightarrow \text{مطلق } Max \end{cases}$$

۱۵۵ اکسترمم‌های پیوسته و مشتق‌پذیر در تابع صدق کرده و طولشان، مشتق را صفر می‌کنند.

$$\left.\begin{matrix} f(۱) = -۳ \rightarrow -۳ = a + b \\ f'(۱) = ۰ \rightarrow f'(x) = ۲ax + b \rightarrow ۰ = ۲a + b \end{matrix}\right\} \rightarrow a = ۳ \text{ و } b = -۶$$

۱۵۶

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{c}{a} = -۳ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	↗	۱۷	↘	-۱۵	↗	
			نسبی max		نسبی min		

۱۵۷

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \rightarrow f'(۲) = ۰ \rightarrow ۱۲ + ۴b = ۰ \rightarrow b = -۳ \quad (۱)$$

$$f(۲) = ۱ \rightarrow ۴b + d = -۷ \xrightarrow{(۱)} -۱۲ + d = -۷ \rightarrow d = ۵$$

۱۵۸

$$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$$

$$f'(۲) = ۰ \Rightarrow b = -۳ \quad , \quad d = ۵$$

۱۵۹

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
f′		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		↘	-۱۶ min	↗	۱۱ max	↘	

۱۶۰

الف درست

۱۶۱ درست

۱۶۲ نمودار (ب). سهمی نمودار داده شده ماکزیمم دارد. پس ضریب $x^۲$ منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود درنتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.

۱۶۳

الف نادرست

۱۶۴

الف سطح مقطع

۱۶۵

الف درست

۱۶۶

الف

$$F\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۳ \end{matrix}\right. \text{ و } F'\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۵ \end{matrix}\right. \rightarrow x_F = x_{F'} \quad \text{بیضی قائم}$$

$$W \left| \begin{matrix} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{matrix} \right. \text{ وسط } FF' \quad \text{و} \quad \text{معادلهٔ قطر بزرگ} \quad x = ۱$$

$FF' = ۲c \to ۲c = ۸$

ب

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to ۱۶ = ۳۶ - b^۲ \to b^۲ = ۲۰ \to b = ۲\sqrt{۵} \to ۲b = ۴\sqrt{۵}$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

۱۶۷

$F\begin{vmatrix}۲\\۵\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}۲\\-۳\end{vmatrix} \to FF'$ وسط $W\begin{vmatrix}\frac{۲+۲}{۲} = ۲\\ \frac{۵-۳}{۲} = ۱\end{vmatrix}$ و $FF' = ۲c \to ۲c = ۸ \to c = ۴$

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to ۱۶ = ۲۵ - b^۲ \to b = ۳ \to ۲b = ۶$

۱۶۸ الف)

$O\begin{vmatrix}\frac{۱+۱}{۲} = ۱\\ \frac{۳-۵}{۵} = -۱\end{vmatrix}$ مرکز $FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ = ۲c \to c = ۴$

ب)

$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \to b = \sqrt{۲۰} \Rightarrow ۲b = BB' = ۲\sqrt{۲۰}$

۱۶۹

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{a=۵\ ,b=۳} c = ۴ \Rightarrow FF' = ۸$

۱۷۰

الف

$a = \frac{۵}{۴}c \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}c^۲ = ۹ + c^۲ FF' = ۲c = ۸$

ب

$a = ۵ \Rightarrow A(۱,-۱), A(-۹,-۱)$

۱۷۱ الف)

$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۹ - ۴ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲\sqrt{۵}$

ب)

$A(۴+۳,۵) \quad , \quad A'(۴-۳,۵)$

۱۷۲

الف

$FF' = ۴\ ,\ O(۱,۳)$

ب

$y = ۳$

پ

$OB' = \sqrt{OA^۲ - OF^۲} = \sqrt{۵}$

$S = \frac{۱}{۲}OB' \times FF' = ۲\sqrt{۵}$

۱۷۳ مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس: $O(۲,-۱)$

با توجه به اینکه $AA' = ۱۲$ و $BB' = ۸$، بنابراین:

$AA' = ۲a = ۱۲ \to a = ۶$

$BB' = ۲b = ۸ \to b = ۴$

همچنین:

$c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \to c = ۲\sqrt{۵} \to FF' = ۲c = ۴\sqrt{۵}$

۱۷۴

روش اول:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \qquad BB'=۲b=۱۰\to b=۵$$

$$a^۲=۲۵+\frac{۳}{۴}a^۲\to a=۱۰\xrightarrow{c=۵\sqrt{۳}} FF'=۲c=۱۰\sqrt{۳}$$

یا

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to a=\frac{۲}{\sqrt{۳}}c \qquad BB'=۲b=۱۰\to b=۵$$

$$\frac{۴}{۳}c^۲=۲۵+c^۲\to c=۵\sqrt{۳}\to FF'=۲c=۱۰\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\begin{cases}a=۲k\\ c=\sqrt{۳}k\end{cases} \qquad BB'=۲b=۱۰\to b=۵$$

$$۴k^۲=۲۵+۳k^۲\to k=۵\Rightarrow c=۵\sqrt{۳}\to FF'=۲c=۱۰\sqrt{۳}$$

۱۷۵

$$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶\to c=۴\to ۲c=۸$$

۱۷۶

$$\begin{cases}۲a=۸\to a=۴\\ ۲b=۶\to b=۳\end{cases}\to c^۲=a^۲-b^۲=۱۶-۹=۷\to c=\sqrt{۷}\to ۲c=۲\sqrt{۷}$$

۱۷۷

الف

$$F\begin{vmatrix}۱\\ ۳\end{vmatrix},\ F'\begin{vmatrix}۱\\ -۵\end{vmatrix}\to FF'=۲c\to ۲c=۸۰\to c=۴$$

$$W\text{ وسط }FF'\begin{vmatrix}\frac{۱+۱}{۲}\\ \frac{۳-۵}{۲}\end{vmatrix}\to W\begin{vmatrix}۱\\ -۱\end{vmatrix}$$

ب

$$c^۲=a^۲-b^۲\to ۱۶=۳۶-b^۲\to b^۲=۲۰\to b=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\to ۲b=۴\sqrt{۵}$$

$$e=\frac{c}{a}\to e=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۱۷۸ $e=\frac{۴}{۵}$ و $w\begin{vmatrix}-۴:\alpha\\ -۱:\beta\end{vmatrix}$ و $۲b=۶$ است.

الف)

$$۲b=۶\to b=۳$$

$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}\to\frac{۴}{۵}=\sqrt{۱-\frac{۹}{a^۲}}\to\frac{۱۶}{۲۵}=۱-\frac{۹}{a^۲}\to\frac{۹}{a^۲}=\frac{۹}{۲۵}\to a=۵\to ۲a=۱۰$$

$$c^۲=a^۲-b^۲\to c^۲=۲۵-۹=۱۶\to c=۴\to ۲c=۸$$

ب)

$$A'\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{vmatrix},\ A'\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{vmatrix}\to A'\begin{vmatrix}-۹\\ -۱\end{vmatrix},\ A\begin{vmatrix}۱\\ -۱\end{vmatrix}$$

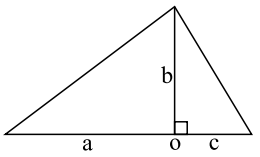
۱۷۹

الف $\frac{۳}{۴}$

۱۸۰ الف)

$$\begin{matrix} a=۵ \\ b=۴ \end{matrix} \rightarrow c^۲=۲۵-۱۶ \rightarrow c=۳ \rightarrow A'F=۸$$

ب)



$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}(۵+۳)\times ۴=۱۶$$

۱۸۱ الف)

$$\begin{cases} b=۳ \\ c=۴ \end{cases} \rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۲a=۱۰$$

ب)

$$\text{محیط}=۲a+۲c=۱۸$$

۱۸۲

$$۲a=۸ \rightarrow a=۴\ ,\ \frac{c}{a}=\frac{۱}{۲} \rightarrow c=۲ \rightarrow FF'=۲c=۴$$

۱۸۳ اگر FF' را فاصلهٔ کانونی و BB' را قطر کوچک بیضی در نظر بگیریم، داریم:

$$FF'=BB' \Rightarrow ۲c=۲b \Rightarrow c=b$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=c^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=۲c^۲ \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۸۴

$$\begin{cases} ۲a=۸ \rightarrow a=۴ \\ ۲b=۶ \rightarrow b=۳ \end{cases} \longrightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۱۶-۹=۷ \longrightarrow c=\sqrt{۷}$$

$$\text{پس}: e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

۱۸۵ الف)

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۱) \quad , \quad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=۳$$

ب) خیر، زیرا $(۰)^۲+(۳)^۲+۲(۳)-۴(۰)-۴\neq ۰$

۱۸۶

$$\rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۲}{۲},\frac{۶}{۲})=(۱,۳)$$

۱۸۷

الف) $-\frac{a}{۲}=۱ \Rightarrow a=-۲$

ب) $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶} \Rightarrow r=۳$

۱۸۸

$$\begin{matrix} f'_x=۰ \rightarrow ۲x-۶=۰ \rightarrow x=۳ \\ f'_y=۰ \rightarrow ۲y+۲=۰ \rightarrow y=-۱ \end{matrix} \longrightarrow C\left|\begin{matrix} ۳ \\ -۱ \end{matrix}\right.$$

$$R^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}=\frac{۳۶+۴-۲۴}{۴}=\frac{۱۶}{۴}=۴ \rightarrow R=۲$$

۱۸۹

الف)

$$(x+۱)^۲+(y-۰)^۲=۴ \rightarrow C\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۰ \end{matrix}\right. \quad , \quad R=۲$$

ب)

$$y=۰\rightarrow (x+۱)^۲=۴\rightarrow \begin{cases} x+۱=۲\rightarrow x=۱\rightarrow \left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right. \\ x+۱=-۲\rightarrow x=-۳\rightarrow \left|\begin{matrix}-۳\\ ۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$

۱۹۰

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۱,-۱)\quad ,\quad r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\sqrt{۱۰}$$

۱۹۱

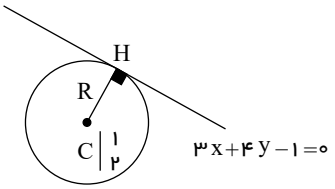
$$x^۲+y^۲-۲x-۳=۰\rightarrow \begin{cases} C\left|\begin{matrix}-\frac{a}{۲}\\ -\frac{b}{۲}\end{matrix}\right.\rightarrow C\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right. \\ R^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}=\frac{۴+۰+۱۲}{۴}=۴\rightarrow R=۲ \end{cases}$$

$$x+y-۳=۰ \text{ از خط } C\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right. \text{ فاصلهٔ } =d=\frac{|۱(۱)+۱(۰)-۳|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

چون $d<R$ است بنابراین خط در دو نقطه دایره را قطع کرده است.

۱۹۲

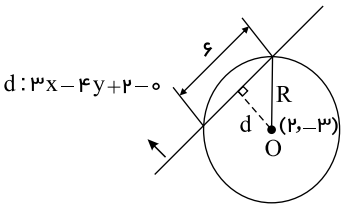
$$R=CH=\frac{|۳(۱)+۴(۲)-۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\rightarrow \begin{cases} C\left|\begin{matrix}۱:\alpha\\ ۲:\beta\end{matrix}\right. \\ R=۲ \end{cases}\rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$$



۱۹۳ شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$d=\frac{|۳\times ۲-۴(-۳)+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=۴$$

$$R=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵\Rightarrow (x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲=R^۲\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۲۵$$



۱۹۴

$$r=\frac{|۳\times ۰-۴(۳)-۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=۳\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۹$$

۱۹۵

$$r=\frac{|۳\times ۰-۴\times ۳-۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=۳\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۹$$

۱۹۶

$$\begin{cases} R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۲}=۲\quad ,\quad O(۱,۰) \\ OH=\frac{|۱\times ۱+۰\times ۱-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\sqrt{۲} \end{cases}\Rightarrow OH<R$$

خط و دایره متقاطع‌اند.

۱۹۷

$$O(۲,-۲)\ ,\ r=۳\ ,\ d=\frac{|۳\times ۲+۴(-۲)|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲}{۵}$$

چون شعاع دایره بزرگ‌تر از فاصلهٔ مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.

۱۹۸

$$r=\frac{|۳(۱)+۴(۲)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۲\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$$

۱۹۹

$$(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۴\rightarrow C\left|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\right.\ ,\ R=۲$$

فاصلهٔ $C\left|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\right.$ از خط افقی $y=-۱$ برابر $d=۲$ است و چون $d=R$ است پس خط بر دایره مماس است.

۲۰۰

$$(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱\rightarrow C\left|\begin{matrix}-۱\\۲\end{matrix}\right.\ ,\ R=۱$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰\rightarrow C'\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.\ ,\ R'^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}=\frac{۴+۱۶-۴}{۴}=۴\rightarrow R'=۱$$

از طرفی: $CC'=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

چون $CC'>R+R'$ است دو دایره متخارج هستند.

۲۰۱

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰: O(-۱,۲)\ ,\ r=۲$$
$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=m^۲: O'(۲,-۱)\ ,\ r'=m$$
$$OO'=۳\sqrt{۲}$$
$$OO'=r+r'\Rightarrow m+۲=۳\sqrt{۲}\Rightarrow m=۳\sqrt{۲}-۲$$

۲۰۲

الف

$$P(A)=\frac{۳}{۴}\quad ,\quad P(B)=\frac{۱}{۴}$$

ب

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|A)$$
$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳۵}{۱۰۰}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵}$$

۲۰۳

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

۲۰۴

الف بیضی

ب دایره

پ مستقل

ت $P(A\mid B)$

۲۰۵

الف -۶ **ب** دایره **پ** مستقل

۲۰۶

الف هرچه خروج از مرکز بیضی کوچکتر شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

ب دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد ناسازگار هستند.

۲۰۷

الف نادرست

علت: دو پیشامد A و B مستقل هستند هرگاه انجام یکی تأثیری روی انجام دیگری نداشته باشد.

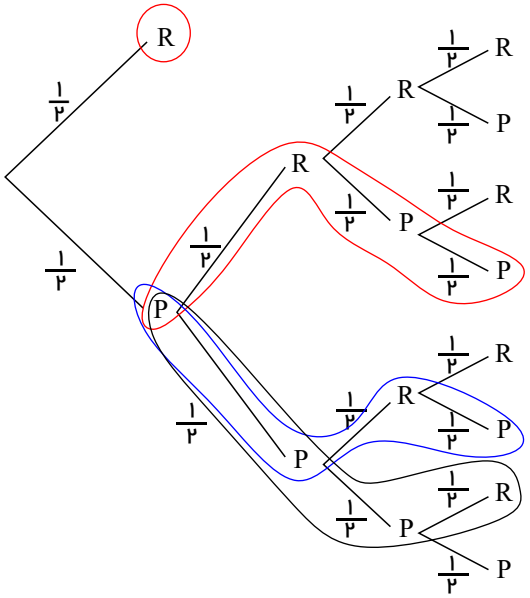
۲۰۸

الف مستقل

ب هذلولی

۲۰۹

«رو» را با R و «پشت» را با P نشان می‌دهیم:

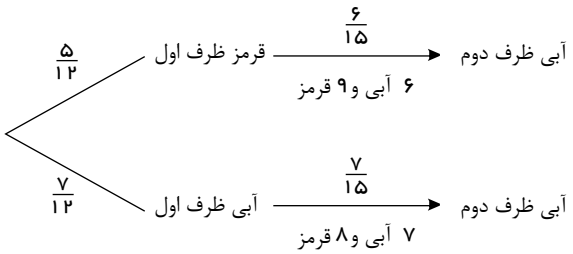


حالت مطلوب: $R\,,\ PRPP\,,\ PPRP\,,\ PPPR$

$$\rightarrow \text{احتمال مطلوب} = \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})$$

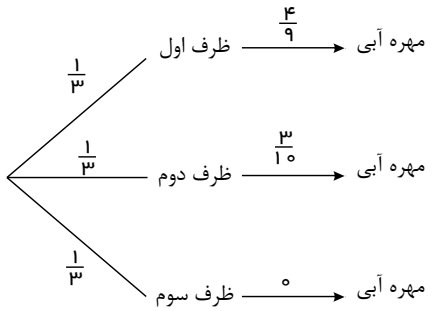
$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

۲۱۰ از ظرف اول ممکن است مهرهٔ آبی یا مهرهٔ قرمز خارج کنیم یک بار مهرهٔ قرمز را در ظرف دوم می‌گذاریم و احتمال آبی بودن را حساب می‌کنیم و یک بار مهرهٔ آبی را در ظرف دوم قرار می‌دهیم و احتمال آبی بودن را حساب می‌کنیم.



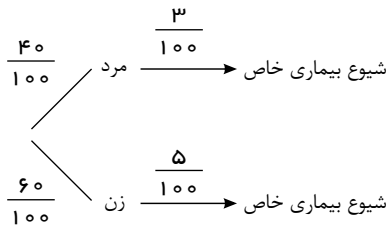
$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۶}{۱۵}) + (\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۵}) = \frac{۷۹}{۱۸۰}$$

۲۱۱

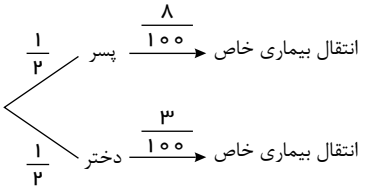


$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۹}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۱۰}) + (\frac{۱}{۳} \times ۰) = \frac{۴}{۲۷} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۶۷}{۲۷۰}$$

۲۱۲



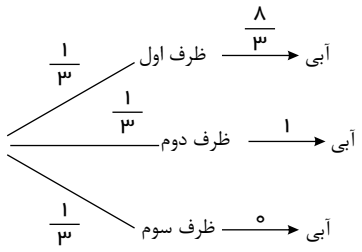
$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰}) + (\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰}) = \frac{۴۲۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۴۲$$



۲۱۳

$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰۰}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۱۰۰}) = \frac{۱۱}{۲۰۰}$$

۲۱۴



$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۸}) + (\frac{۱}{۳} \times ۱) + (\frac{۱}{۳} \times ۰) = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۱}{۲۴}$$

۲۱۵

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$P(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۱۱}{۲۰۰}$$

۲۱۶

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$P(A) = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۳} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۵۶}{۱۳۰}$$

۲۱۷

$$P(R) = P(A_۱)P(R|A_۱) + P(A_۲)P(R|A_۲) + P(A_۳)P(R|A_۳) + P(A_۴)P(R|A_۴)$$

$$P(R) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۱}{۴} \times ۱ + \frac{۱}{۴} \times \frac{۴}{۱۲} + \frac{۱}{۴} \times ۰ = \frac{۲۹}{۶۰}$$

۲۱۸

$$P(A) = P(B_1)P(B_1|A) + P(B_2)P(B_2|A)$$
$$P(A) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۵}{۱۱} + \frac{۳}{۸} \times \frac{۴}{۱۱} = \frac{۳۷}{۸۸}$$

۲۱۹

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)$$
$$P(A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۴}{۱۴} + \frac{۱}{۴} \times ۱ + \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۸} + \frac{۱}{۴} \times ۰ = \frac{۵۷}{۱۱۲}$$

۲۲۰

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B)$$
$$P(A) = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۳} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۵۶}{۱۳۰}$$

۲۲۱

الف $\{۱\}$

۲۲۲

$$P = (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۱۵}) + (\frac{۱}{۳} \times ۰) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۶}{۱۲}) = \frac{۷}{۳۰}$$

۲۲۳

$$P(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۴} = \frac{۷}{۱۶}$$

توجه کنید که فضای نمونه‌ای هم‌شانس نیست.

۲۲۴

$\frac{۱}{۲}$ پسر $\xrightarrow{\frac{۷}{۱۰۰}}$ بیمار

$\frac{۱}{۲}$ دختر $\xrightarrow{\frac{۴}{۱۰۰}}$ بیمار

$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۱۰۰}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۱۰۰}) = \frac{۱۱}{۲۰۰}$$

۲۲۵

$$p = (۰/۴۵ \times ۰/۰۴) + (۰/۵۵ \times ۰/۰۶) = ۰/۰۵۱$$