

فصل دوم : هندسه

۱ ترسیم ها و مکان هندسی

۲ خواص نسبت تناسب

۳ قضیه تالس

۸ تشابه اشکال هندسی

۸ اجزای متناظر با نسبت تشابه

فصل دوم : هندسه

ترسیم ها و مکان هندسی

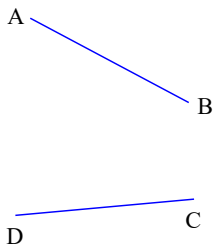
۱ دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطه O (محل تقاطع) به فاصله 5cm بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

۲ الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند.

نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمودمنصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و

به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



۳ نقطه‌ی A به فاصله‌ی 2cm از خط d قرار دارد. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی 3cm باشد؟

۴ مربعی رسم کنید که طول قطر آن معلوم باشد.

۵ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه

ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه

وضعیتی دارند؟ چرا؟

۶ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به

شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۷ نقاطی از یک صفحه را پیدا کنید که از دو نقطه A و B در آن صفحه به یک فاصله بوده و از خط مفروض d در همان صفحه به فاصله معلوم a

باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث شود.)

۸ دایره‌ای وجود دارد که از سه نقطه زیر عبور می‌کند مرکز دایره و شعاع دایره را مشخص کنید.



۹ زاویه xoy را به چهار زاویه مساوی تقسیم کنید.

۱۰ دو دایره به مرکزهای O و O' یکدیگر را در نقاط A و B قطع کرده‌اند. ثابت کنید OO' عمودمنصف پاره خط AB است.

۱۱ مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۵ و ۷ باشد.

۱۲ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

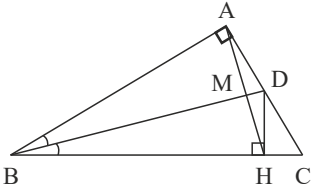
ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.

۱۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نیمساز زاویه B ، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند، از نقطه D بر وتر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را نقطه H می‌نامیم.

الف - ثابت کنید $\triangle ABD = \triangle HBD$

ب - ثابت کنید $\hat{DAM} = \hat{DHM}$



۱۴ در مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB یکی از قطرهای آن باشد.

۱۵ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد است.

۱۶ در مثلث ABC ، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند دایره‌ای رسم کنید که بر سه ضلع مثلث مماس باشد طریقه رسم دایره را توضیح دهید.

۱۷ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، اگر طول ارتفاع $AH = 4$ و مساحت آن برابر ۱۲ باشد، طریقه رسم مثلث را شرح داده و آن را رسم کنید.

خواص نسبت تناسب

۱۸ اگر $\frac{4a+5}{5+6a} = \frac{4b+8}{8+6b}$ باشد نسبت $\frac{b}{a}$ را بدست آورید.

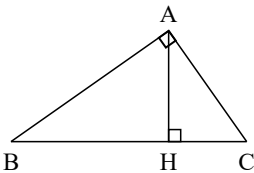
۱۹ اگر $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ باشد، حاصل $\frac{3a+2b+6c}{6a+b+3c}$ را بدست آورید.

۲۰ در هر مورد، مقدار عددی $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$

ب) $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

۲۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت بدست آمده برای مساحت مثلث یک تناسب بدست آورید.



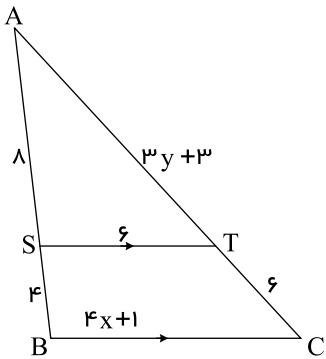
۲۲ اگر $\frac{5a+2b}{5a+4b} = \frac{2}{3}$ باشد نسبت $\frac{a}{b}$ را بدست آورید.

۲۳ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

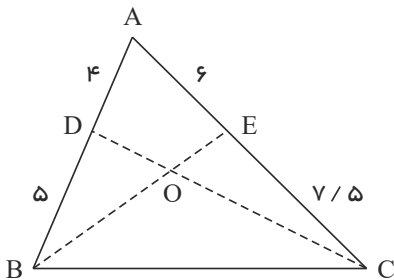
الف) اگر تساوی $\frac{a}{5+a} = \frac{b}{4+b}$ برقرار باشد آن گاه نسبت $\frac{a}{b}$ برابر است.

قضیه تالس

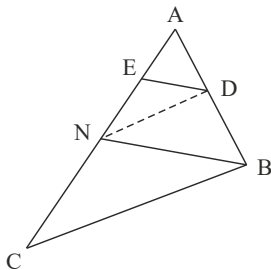
۲۴ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را بدست آورید.



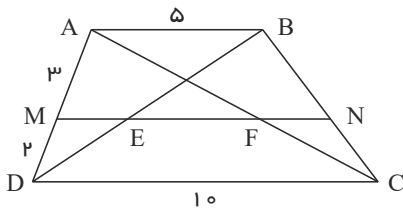
۲۵ در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE را بدست آورید.



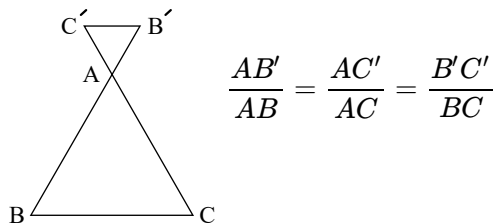
۲۶ در شکل زیر $DE \parallel BN$ و $DN \parallel BC$ ، $AE = 4$ و $EN = 6$ می باشد. اندازه ی AC را بدست آورید.



۲۷ در دوزنقه شکل روبرو $MN \parallel AB$ است. طول پاره خط EF را بدست آورید.



۲۸ با توجه به شکل، اگر $B'C' \parallel BC$ باشد، آن گاه ثابت کنید:



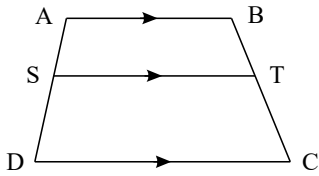
۲۹ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبرو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل اند.

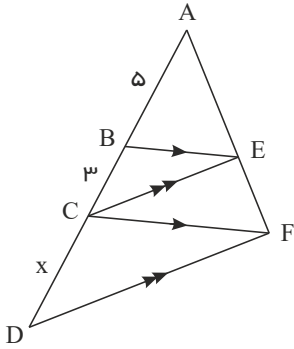
ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتر کوچک تر است از ضلع مقابل به ارتفاع کوچک تر



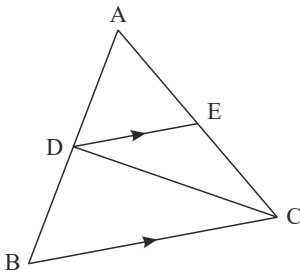
۳۰ در ذوزنقهٔ مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$

۳۱ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۳۲ در شکل زیر $CE \parallel DF$ و $BE \parallel CF$ می‌باشد. مقدار x را بدست آورید.



۳۳ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ است. مساحت مثلث ADE چه کسری از مساحت مثلث DEC است؟



۳۴ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

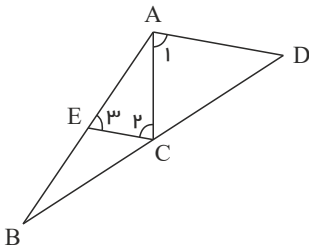
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگتر است.

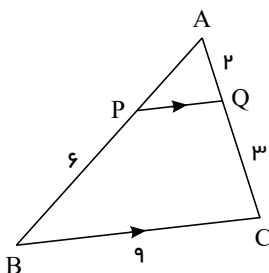
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق هستند.

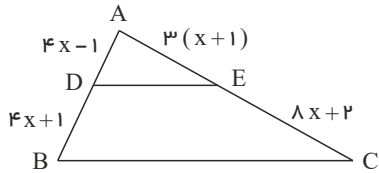
۳۵ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط، دو خط عمود بر آن خط رسم کرد.

۳۶ در شکل روبرو $\hat{A}_1 = \hat{C}_2 = \hat{E}_3$ و $AC = 6$ و $AB = 15$ باشد، مقدار $\frac{BD}{CD}$ چقدر است؟



۳۷ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را بدست آورید.



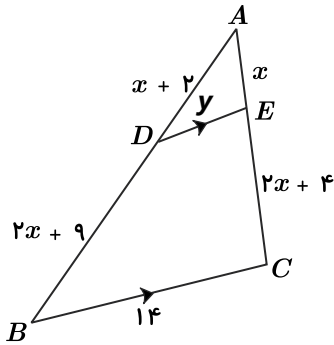


۳۸ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.

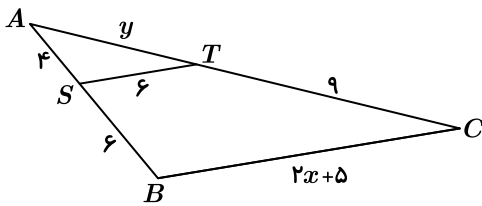
۳۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف در استدلال استقرایی از کل به جز می‌رسیم.

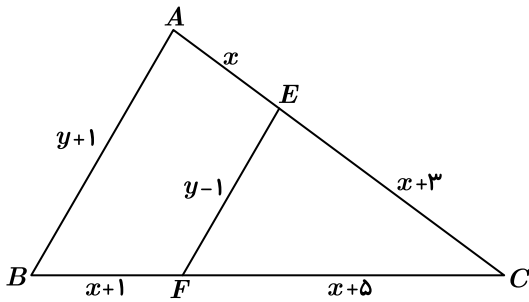
۴۰ در شکل مقابل $BC \parallel DE$ می‌باشد. مقادیر x و y را محاسبه کنید.



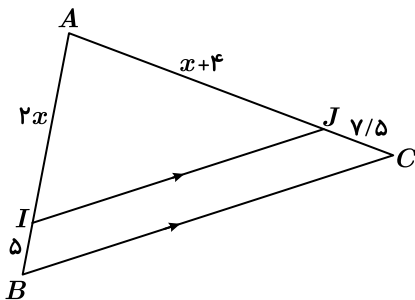
۴۱ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x, y را به دست آورید.



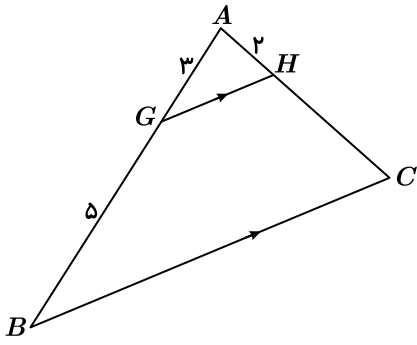
۴۲ اگر $EF \parallel AB$ مقادیر x, y را بیابید.



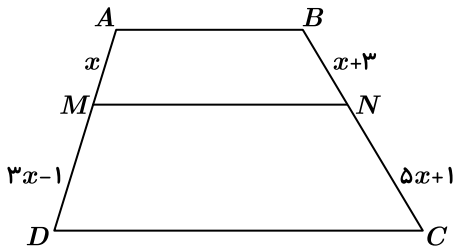
۴۳ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره‌های AJ و AI را به دست آورید.



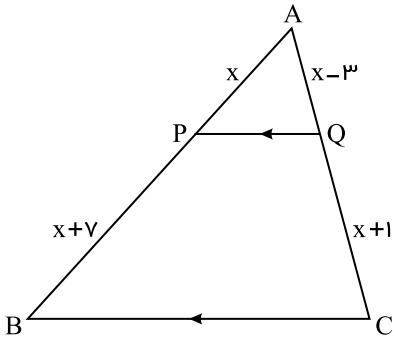
۴۴ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازه پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



۴۵ در دوزنقه مقابل، اگر $MN \parallel AB$ باشد، مقدار x را به دست آورید.



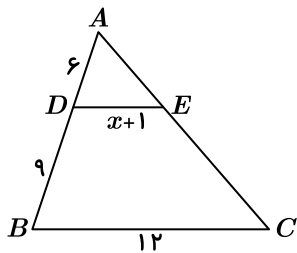
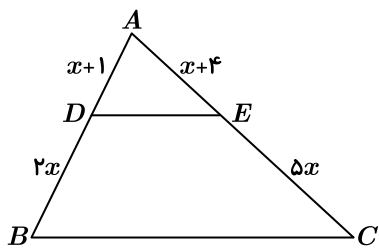
۴۶ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است.



الف مقدار x را بیابید.

ب مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

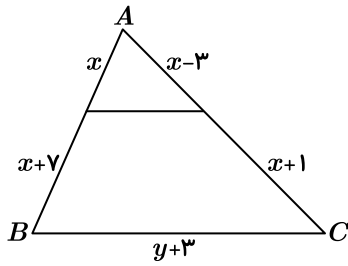
۴۷ در هر یک از شکل‌های زیر، پاره‌خط DE موازی BC است. مقادیر مجهول را به دست آورید.



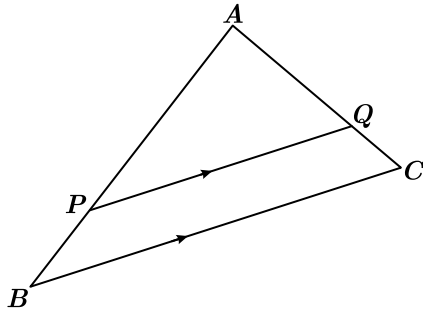
الف

ب

پ



۴۸ در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AC}$$

$$\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$$

الف

ب

پ

ت

ث

ج

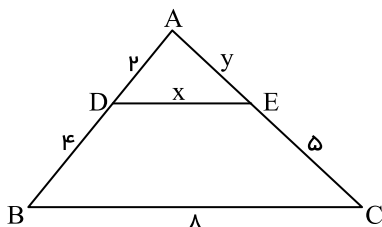
۴۹ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف استدلالی که براساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، انجام می‌شود، استدلال نامیده می‌شود.

۵۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف قضیه تالس، یک قضیه دوشروطی است.

۵۱ در مثلث ABC پاره خط DE موازی با ضلع BC است، مقادیر مجهول x و y را محاسبه کنید.



۵۲ حکم کلی زیر را با مثال نقض رد کنید.

به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.

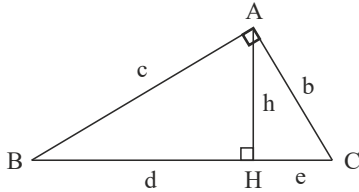
۵۳ در هر مثلث هر پاره خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می کند، ضلع سوم است.

- الف) موازی ب) مساوی ج) موازی و مساوی نصف د) موازی و مساوی

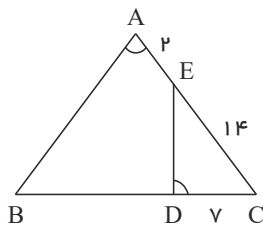
تشابه اشکال هندسی اجزای متناظر با نسبت تشابه

۵۴ در مثلث قائم الزاویه روبرو مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

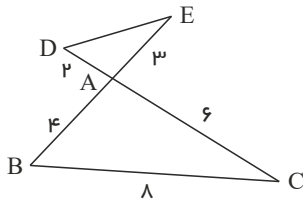
$d = 5, e = 3, b = ?, c = ?$



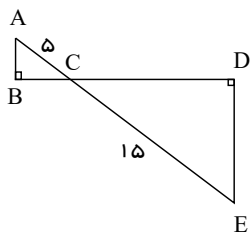
۵۵ در شکل روبرو $\hat{A} = \hat{D}$ است طول BD را بدست آورید.



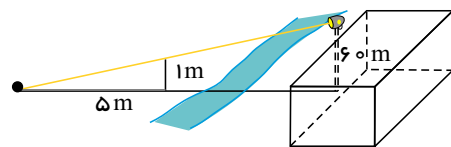
۵۶ در شکل روبرو طول پاره خط DE را بدست آورید.



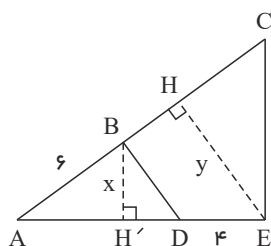
۵۷ در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می کنید. نسبت محیطها و مساحت های آنها را به دست آورید.

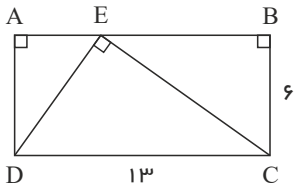


۵۸ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

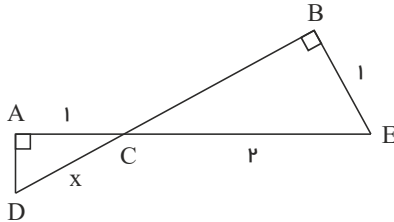


۵۹ در شکل روبرو $AD = 8, DE = 4, AB = 6$ و $BC = 10$ می باشد. نسبت $\frac{x}{y}$ را بدست آورید.

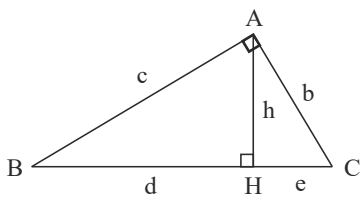




۶۰ در مستطیل روبرو طول AE را بدست آورید، اگر $AB = 13$ و $BC = 6$ باشد. ($AE < EB$)

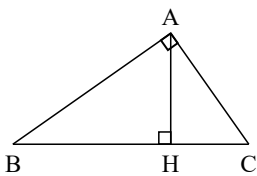


۶۱ در شکل زیر، دو زاویه A و B قائمه هستند. مقدار x را بدست آورید.



۶۲ در مثلث قائم‌الزاویه روبرو مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$h = 5, d = 7, e = ?, c = ?$



۶۳ در مثلث قائم‌الزاویه روبرو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را بدست آورید.

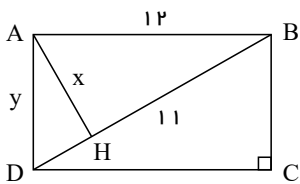
الف $AC = ?, AB = ?, AH = ?, BH = 9, BC = 10$

ب $AB = ?, AH = ?, BC = ?, CH = 2, AC = 5$

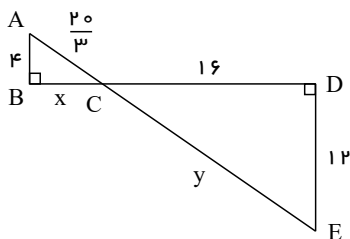
پ $CH = ?, BH = ?, AH = ?, BC = ?, AC = 6, AB = 8$

ت $AC = ?, BC = ?, BH = ?, AH = 6, AB = 12$

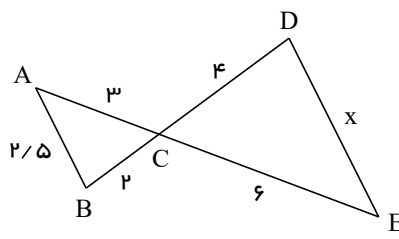
۶۴ در مستطیل مقابل مقادیر x و y را بدست آورید.



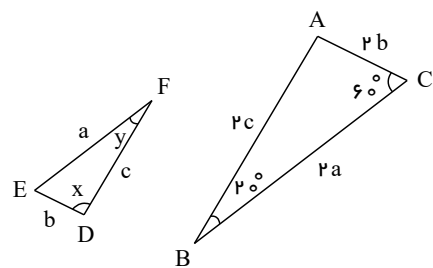
۶۵ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را بدست آورید.



(پ)

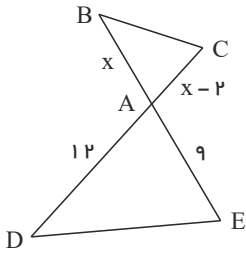


(ب)



(الف)

۶۶ در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت‌های آن‌ها را بدست آورید.

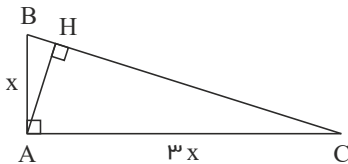


۶۷ اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگتر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچکتر را بدست آورید.

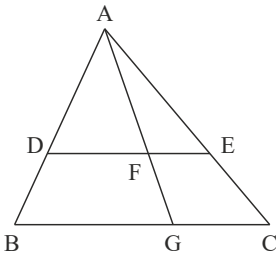
۶۸ طول اضلاع یک مثلث ۱۱، ۷ و ۵ سانتی‌متر و طول کوچک‌ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اول ۲۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را بدست آورید.

۶۹ در دوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی را بدست آورید که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل می‌شود.

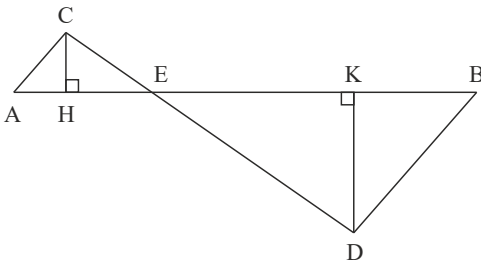
۷۰ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ به ۳ و مساحت مثلث ۶۰ واحد مربع است. طول ارتفاع وارد بر وتر را بدست آورید.



۷۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $\frac{AF}{FG} = \frac{3}{2}$ می‌باشد. نسبت مساحت مثلث‌های ABC و ADE را بدست آورید.

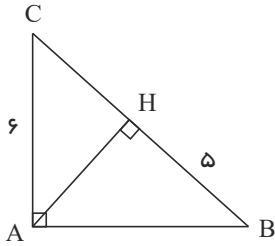


۷۲ در شکل مقابل $AB = 20$ ، $DK = 5$ و $CH = 3$ و $AC \parallel BD$ است. مساحت مثلث ACE را بدست آورید.

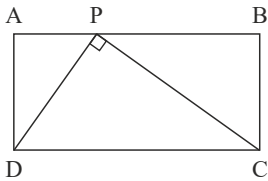


۷۳ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵، ۶، ۹ و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۵۰ باشد، طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ را بدست آورید.

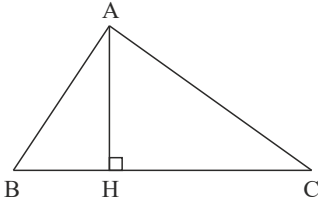
۷۴ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اگر $AC = 6$ و $BH = 5$ باشد، اندازه‌ی AH و AB را بدست آورید.



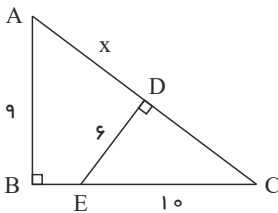
۷۵ در مستطیل شکل روبرو $\hat{P} = 90^\circ$ و $AP = BP = 9$ است. طول DP را بدست آورید.



۷۶ در مثلث قائم‌الزاویه ($\hat{A} = 90^\circ$) روبرو $BH = 1,8$ و $CH = 3,2$ می‌باشد. طول اضلاع زاویه‌ی قائمه و ارتفاع وارد بر وتر را بدست آورید.



۷۷ در شکل روبرو مقدار x را بدست آورید.



۷۸ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید، به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد. اکنون

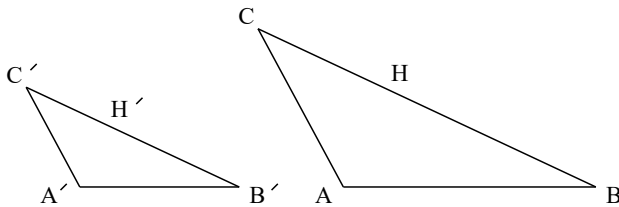
ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

(الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

(ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را بدست آورید.

(پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

(ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بدست آورید.



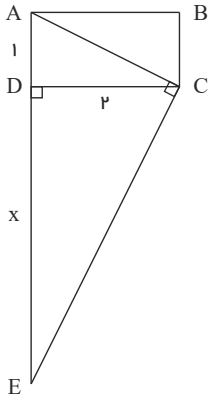
۷۹ نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{49}{121}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ چند

سانتی‌متر است؟

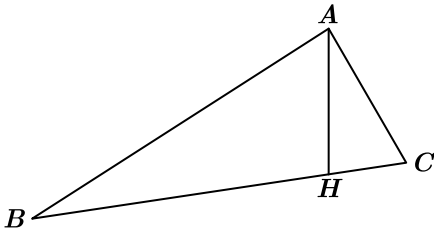
۸۰ در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = 70^\circ$ ، $\hat{B} = 50^\circ$ و $AB = 18$ و در مثلث MNP داریم $\hat{M} = 70^\circ$ و $\hat{N} = 60^\circ$. اگر مساحت مثلث

ABC برابر $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث MNP باشد، طول ضلع MP چقدر است؟

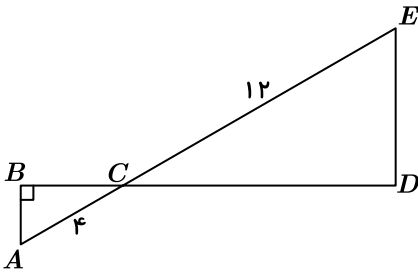
۸۱ در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک مستطیل را در نقطه‌ی E قطع کند. مقدار x را بدست آورید.



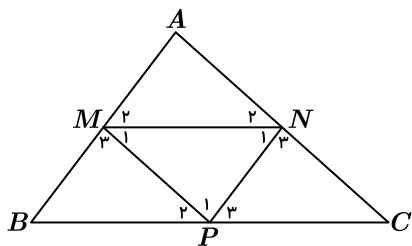
۸۲ مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است ($A = 90^\circ$) که AH ارتفاع وارد بر وتر آن است. اگر $AB = 12$ و $AH = 6$ باشند، آنگاه اندازه AC, BC, BH را بیابید.



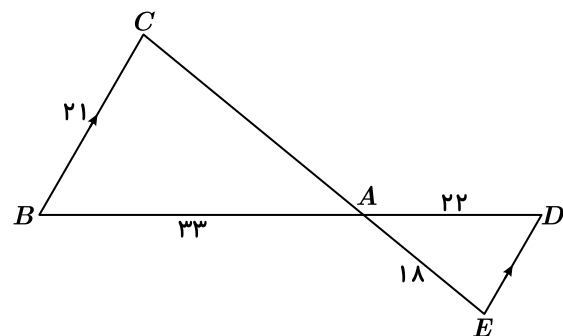
۸۳ در شکل زیر دلیل تشابه مثلث‌ها را بیان کنید. سپس نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر را بیابید.



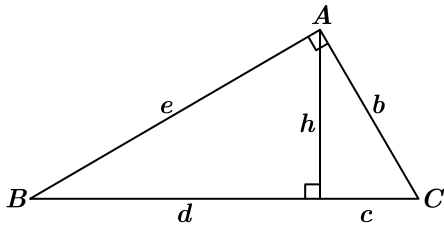
۸۴ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $ABC \sim A'B'C'$ و $A'B'C' \sim A''B''C''$ دربارۀ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟



۸۵ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNP و ABC متشابه‌اند.



۸۶ در شکل مقابل $BC \parallel DE$. اندازه‌ی پاره‌خط‌های CA و DE را به دست آورید.



۸۷ در مثلث قائم‌الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

$e = ? \quad d = 7 \quad h = 5$

$c = ? \quad b = ? \quad e = 3 \quad d = 5$

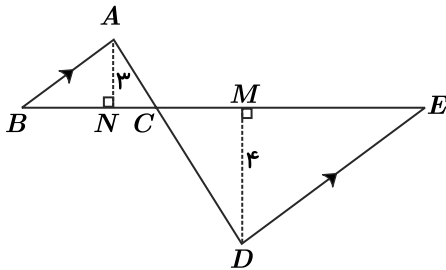
$h = ? \quad b = 6 \quad c = 8$

الف

ب

پ

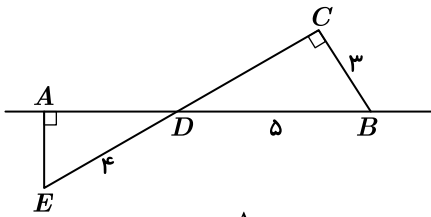
۸۸ در شکل مقابل $AB \parallel ED$ است.



الف نشان دهید دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ متشابه هستند.

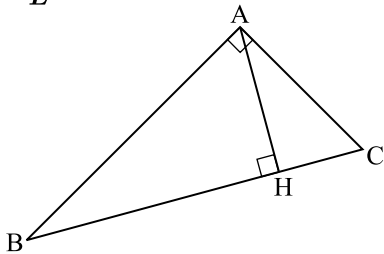
ب اگر $DM = 4$, $AN = 3$, $BE = 7$ باشد آنگاه طول ضلع BC را محاسبه کنید.

۸۹ در شکل روبه‌رو، ابتدا نشان دهید دو مثلث ADE و CDB متشابه‌اند، سپس به کمک آن طول پاره‌خط AD را بیابید.



۹۰ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو، اندازه پاره‌خط‌های خواسته شده را به دست آورید.

$AC = 6, \quad HC = 4, \quad BC = ? \quad AB = ?$



۹۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABC به رأس قائمه A ، اگر ارتفاع وارد بر BC باشد و $AH = 4\text{cm}$ و $BH = 2\text{cm}$ ، آنگاه اندازه HC و BA را به دست آورید.

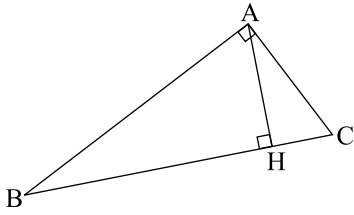
۹۲ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{4}{25}$ باشد، نسبت نیمسازهای آنها برابر است.

(د) $\frac{4}{50}$

(ج) $\frac{4}{5}$

(ب) $\frac{2}{5}$

(الف) $\frac{16}{625}$



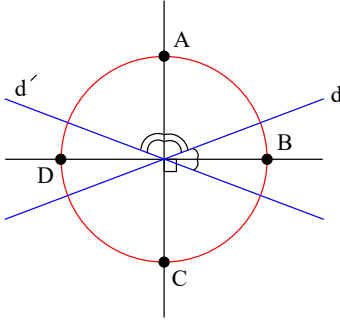
۹۳ در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو، اندازهٔ پاره‌خط‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

$$BH = ۹ , AH = ۶ \quad BC = ? \quad AC = ?$$

پاسخنامه تشریحی

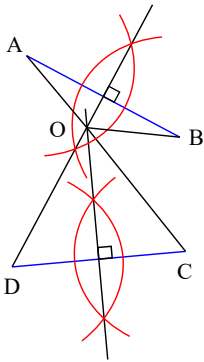
۱

ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع 5cm یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطه A, B, C, D از دو خط به یک فاصله‌اند و از O به فاصله 5cm هستند.



۲

الف) نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله باشد روی عمودمنصف AB قرار دارد پس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقطه‌ای که از C و D به یک فاصله باشد روی عمودمنصف CD قرار دارد پس عمودمنصف CD را رسم می‌کنیم. نقطه‌ای که هر دو خاصیت بالا را داشته باشد در محل برخورد دو عمودمنصف (نقطه O) است.



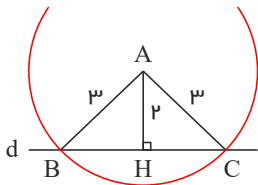
(ب)

$$\left. \begin{array}{l} \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف } AB \rightarrow OA = OB \\ \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف } CD \rightarrow OC = OD \\ \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف } BC \rightarrow OB = OC \end{array} \right\} OA = OB = OC = OD \rightarrow$$

رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ روی محیط دایره‌ای (G) به مرکز O و به شعاع OA قرار دارند.

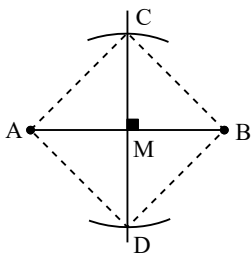
۳

نقطه‌ای که به فاصله 3cm از نقطه A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع 3cm قرار دارند و چون شعاع این دایره بیشتر از 2cm (فاصله نقطه A تا خط d $AH = d$) است، پس دایره خط d را در دو نقطه قطع می‌کند و نقاط C, B جواب مسئله هستند.



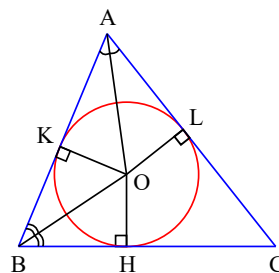
۴) فرض کنیم قطر موردنظر AB باشد، پس ابتدا AB را کشیده و در ادامه عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد عمودمنصف با پاره خط AB را M می‌نامیم.

به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کرده تا عمودمنصف را در نقاط C و D قطع کند. در پایان از C و D به A و B وصل کرده و مربع به دست می‌آید. توجه کنید ۴ضلعی $ABCD$ مربع است، زیرا قطرهای باهم برابر بوده و یکدیگر را نصف می‌کنند.



۵

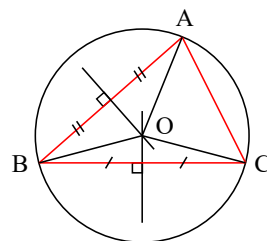
$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} \text{ نیمساز} &= AO \rightarrow OL = OK \\ \widehat{B} \text{ نیمساز} &= BO \rightarrow OK = OH \end{aligned} \right\} \rightarrow OL = OK = OH$$



دایره به مرکز O و شعاع OH بر هر سه ضلع مثلث مماس است.

۶ عمودمنصف‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.

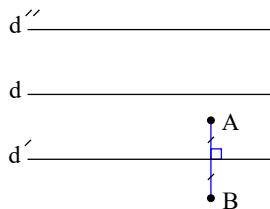
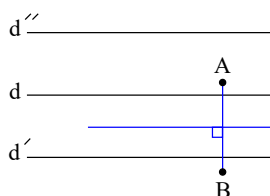
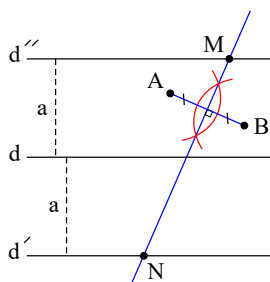
$$\left. \begin{aligned} \text{روی عمودمنصف } AB \text{ نقطه } O \rightarrow OA = OB \\ \text{روی عمودمنصف } BC \text{ نقطه } O \rightarrow OB = OC \end{aligned} \right\} \rightarrow OA = OB = OC$$



پس نقاط A و B و C روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA قرار دارند. یعنی محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.

۷

ابتدا موازی خط d و به فاصله a در دو طرف آن دو خط موازی d' و d'' را رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم، برخورد عمود منصف با دو خط d' و d'' جواب مسأله است. (نقاط A و B از نقاط M و N به یک فاصله‌اند و این نقاط از d به فاصله a هستند).



بحث درباره جواب‌ها:

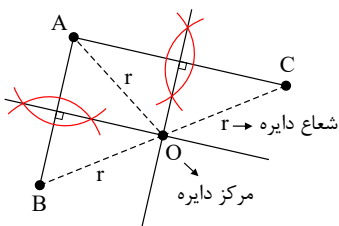
حالت اول: دو نقطه M و N در شکل بالا جواب سؤال هستند.

حالت دوم: اگر عمود منصف AB ، با سه خط d ، d' و d'' موازی باشد، سؤال فاقد جواب است. (راستای A و B بر d عمود باشد).

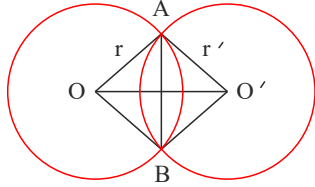
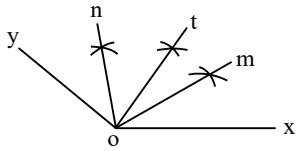
حالت سوم: اگر عمود منصف AB و B بر یکی از سه خط d یا d' یا d'' منطبق باشد، سؤال بی‌شمار جواب دارد.

۸

فرض کنیم سه نقطهٔ مقابل در یک صفحه در یک امتداد نباشند دایره‌ای وجود دارد که از این سه نقطه بگذرد. عمود منصف‌های دو پاره خط دلخواه (AB و AC) را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو عمودمنصف، مرکز دایرهٔ مزبور بوده و شعاع دایره نیز فاصلهٔ این نقطه تا سه نقطه A ، B و C است.



۹ به روش رسم نیم‌ساز، ابتدا نیم‌ساز زاویه $x\hat{O}y$ را رسم کرده و آن را ot می‌نامیم. سپس جداگانه نیم‌ساز زاویه $x\hat{O}t$ را رسم کرده و آن را om و بعد نیم‌ساز $y\hat{O}t$ را رسم کرده و آن را on می‌نامیم. به این ترتیب زاویه $x\hat{O}y$ به چهار زاویهٔ مساوی تقسیم می‌شود.



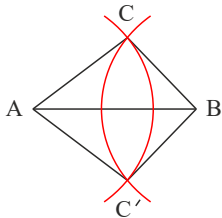
۱۰

نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB است $OA = OB = r \rightarrow$

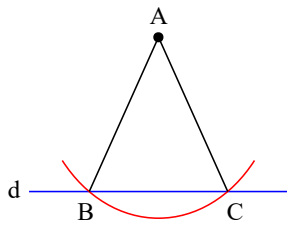
نقطه‌ی O' روی عمودمنصف AB است $O'A = O'B = r' \rightarrow$

چون نقطه‌ی O و O' هر دو روی عمودمنصف AB قرار دارند پس OO' عمودمنصف AB است.

۱۱ ابتدا ضلع AB را به طول ۷ واحد رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۵ واحد یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۴ واحد هم کمانی دیگر رسم می‌کنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقطه‌ی C و C' قطع کنند. دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABC'$ جواب مسئله است زیرا در $\triangle ABC$ داریم: $AB = 7, AC = 5, BC = 4$ و در $\triangle ABC'$ داریم: $AB = 7, AC' = 5, BC' = 4$



۱۲ الف) دهانه‌ی پرگار را بیش از ۴ سانتی‌متر باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز نقطه‌ی A و شعاع انتخاب شده رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقینی $\triangle ABC$ جواب مسئله است زیرا $AB = AC = R$



ب) مطابق با شرایط قسمت الف) عمل می‌کنیم و دهانه‌ی پرگار را دقیقاً ۶ سانتی‌متر باز می‌کنیم تا طول ساق‌ها ۶ سانتی‌متر بدست آید.

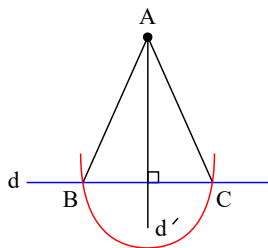
ب) چون فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d (قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین) ۴ سانتی‌متر است پس ارتفاع مثلث ۴ سانتی‌متر است و قاعده‌ی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \rightarrow 8 = \frac{4 \times BC}{2} \rightarrow \boxed{BC = 4}$$

اکنون باید مثلث ABC را طوری رسم کنیم که قاعده‌ی آن (BC) برابر ۴ سانتی‌متر باشد.

ابتدا از نقطه‌ی A خط d' را بر خط d عمود می‌کنیم و محل برخورد دو خط را H می‌نامیم. پس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۲ سانتی‌متر (نصف قاعده) باز می‌کنیم و به

مرکز H دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. $\triangle ABC$ جواب مسئله است زیرا $AB = AC, BC = 4$ و $AH = 4$ و $S = 8 \text{ cm}^2$



۱۳

الف)

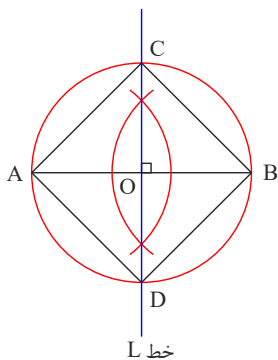
$$\left. \begin{array}{l} BD = BD = \text{مشتراك} \\ \widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ \\ BD = BD \rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{HBD} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle HBD$$

(ب)

$$\triangle ABD = \triangle HBD \rightarrow \begin{cases} \widehat{ADM} = \widehat{HDM} \\ AD = DH \\ AB = BH \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADM} = \widehat{HDM} \\ AD = DH \\ MD = MD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMD = \triangle HMD \Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{DHM}$$

۱۴



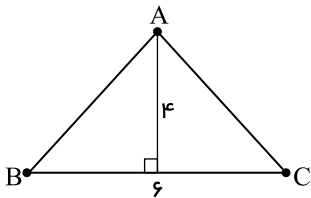
در مربع قطرهای عمودمنصف یکدیگرند. ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. محل برخورد پاره‌خط AB و عمودمنصف AB (خط L) را نقطه‌ی O می‌نامیم. نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AB است. اکنون به مرکز O و شعاع OA، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط L (عمودمنصف AB) را در دو نقطه‌ی C و D قطع کند. چهارضلعی ABCD مربع و جواب مسئله است.

۱۵

الف) عمود منصف‌های اضلاع مثلث

۱۶) در مثلث ABC، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است از نقطه O به سه ضلع مثلث عمود می‌کنیم $OH = OH'$, $OH = OH''$ این مقدار مساوی را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم می‌کنیم.

۱۷



$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} \rightarrow 12 = \frac{4 \times BC}{2} \rightarrow BC = 6$$

ضلع BC را به اندازه 6 رسم می‌کنیم از نقطه H وسط BC عمودی به اندازه 4 جدا می‌کنیم و رأس A می‌نامیم، رأس A را به B و C وصل می‌کنیم.

۱۸

$$\frac{4a + 5}{5 + 6a} = \frac{4b + 8}{8 + 6b} \rightarrow (4a + 5)(8 + 6b) = (4b + 8)(5 + 6a)$$

$$\rightarrow 32a + 24ab + 40 + 30b = 20b + 24ab + 40 + 48a$$

$$\rightarrow 30b - 20b = 48a - 32a \rightarrow 10b = 16a \rightarrow 5b = 8a \rightarrow \boxed{\frac{b}{a} = \frac{8}{5}}$$

۱۹

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k$$

$$\rightarrow \frac{3a + 2b + 6c}{6a + b + 3c} = \frac{3(2k) + 2(3k) + 6(4k)}{6(2k) + 3k + 3(4k)} = \frac{6k + 6k + 24k}{12k + 3k + 12k} = \frac{36k}{27k} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

۲۰

$$\text{الف) } a(\lambda + b) = b(10 + a) \rightarrow \lambda a + ab = 10b + ab \rightarrow \lambda a = 10b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{\lambda} \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{5}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } (3a + 10)(7 + 2b) &= (3b + 7)(10 + 2a) \\ \rightarrow 21a + 6ab + 70 + 20b &= 30b + 6ab + 70 + 14a \\ \rightarrow 21a - 14a &= 30b - 20b \rightarrow 7a = 10b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{10}{7}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} BC \times AH \\ S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} AB \times AC \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$$

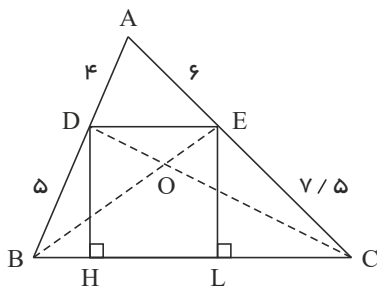
$$\begin{aligned} \frac{5a + 2b}{5a + 4b} &= \frac{2}{3} \rightarrow 3(5a + 2b) = 2(5a + 4b) \rightarrow 15a + 6b = 10a + 8b \\ \rightarrow 15a - 10a &= 8b - 6b \rightarrow 5a = 2b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{2}{5}} \end{aligned}$$

$$\frac{5}{4}$$

$$ST \parallel BC \rightarrow \frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC} \rightarrow \frac{\lambda}{4} = \frac{3y + 3}{6}$$

$$\rightarrow 3y + 3 = 12 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$ST \parallel BC \rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC} \rightarrow \frac{\lambda}{12} = \frac{12}{18} = \frac{6}{4x + 1} \rightarrow 4x + 1 = 9 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow \boxed{x = 2}$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{AD}{DB} &= \frac{4}{5} \\ \frac{AE}{EC} &= \frac{6}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow DH = DL \Rightarrow S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BCE}$$

۲۱

۲۲

۲۳

الف

۲۴

۲۵

$$\rightarrow S_{\triangle BDO} + S_{\triangle OBC} = S_{\triangle ECO} + S_{\triangle OBC} \rightarrow S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OCE} \rightarrow \frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OCE}} = 1$$

۲۶

$$DE \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AN} \quad (1)$$

$$DN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{10}{AC} \rightarrow \boxed{AC = 25}$$

۲۷

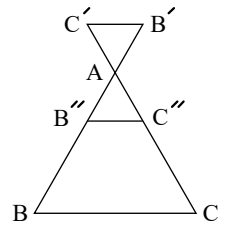
$$\triangle ABD : ME \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AB} = \frac{MD}{AD} \rightarrow \frac{ME}{5} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{ME = 2}$$

$$\triangle ADC : MF \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} \rightarrow \frac{MF}{10} = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{MF = 6}$$

$$ME + EF = MF \rightarrow 2 + EF = 6 \rightarrow \boxed{EF = 4}$$

۲۸ پاره خط $B''C''$ را طوری رسم می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\begin{cases} AB'' = AB' \\ AC'' = AC' \end{cases}$$



از این رو دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشتاند، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{طبق خطوط موازی و مورب} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \\ \text{طبق تساوی مثلث} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'' \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}''$$

حال در $\triangle ABC$ تعمیم قضیه تالس را می‌نویسیم:

$$B''C'' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}$$

و چون دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ هم‌نهشتاند، کافی است ضلع متناظر هر ضلع را در تساوی فوق جایگذاری کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

۲۹ الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع روبرو موازی خواهند بود.

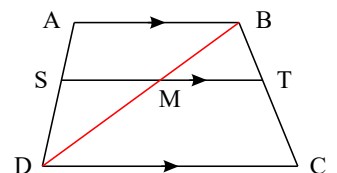
پ) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل هم باشند، آنگاه رأس‌های چهارضلعی روی یک دایره قرار خواهند داشت.

ت) در یک مثلث اگر دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع متناظر به ضلع بزرگتر کوچک‌تر است از ارتفاع متناظر به ضلع کوچک‌تر.

۳۰

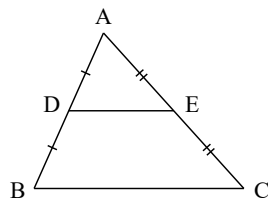
$$\begin{aligned} \triangle ABD : SM \parallel AB &\rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BM}{MD} \quad (1) \\ \triangle BCD : MT \parallel DC &\rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{BT}{TC} \quad (2) \end{aligned}$$

اثبات: قطر BD را رسم می‌کنیم و داریم:



$$(1), (2) \rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

۳۱



فرض: $AE = EC, AD = DB$
 حکم: $DE = \frac{BC}{2}, DE \parallel BC$

اثبات:

$$\begin{aligned} AD &= DB \\ AB &= AD + DB \end{aligned} \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} AE &= EC \\ AC &= AE + EC \end{aligned} \rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \rightarrow DE = \frac{BC}{2}$$

$$BE \parallel CF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \quad (1)$$

$$CE \parallel DF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{DC} \quad (2)$$

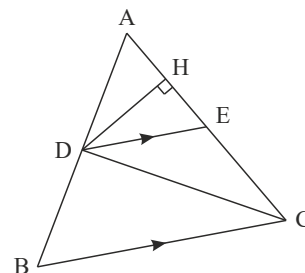
$$(1), (2) \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{DC} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{8}{x} \rightarrow 5x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{5}$$

۳۲

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{AD}{AB - AD} = \frac{3}{5 - 3} \rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{3}{2}$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{\frac{1}{2} AE \cdot DH}{\frac{1}{2} EC \cdot DH} \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$$



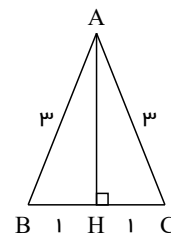
۳۳

۳۴ الف) عدد ۱۳۱ بزرگتر از ۱۲۷ و اول است پس حکم رد می‌شود.

ب) اگر یک مربع دلخواه (مثلاً به طول ضلع ۶ متر) را انتخاب کنیم مساحت مربع ۳۶ متر مربع می‌شود. اگر قطرهای مربع را رسم کنیم، مربع به ۴ مثلث مساوی با مساحت هر کدام ۹ متر مربع تقسیم می‌شود و مشاهده می‌کنیم که مساحت مثلث از مساحت مربع کمتر است پس حکم رد می‌شود.

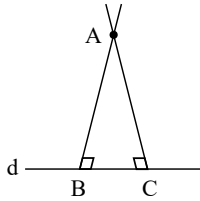
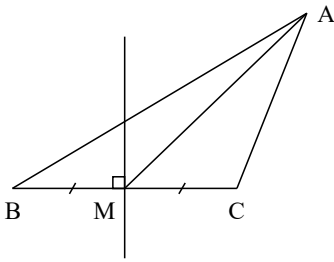
پ) اگر یک مثلث متساوی‌الساقین بطول ضلع‌های ۳ و ۳ و ۲ را در نظر بگیریم باتوجه به شکل و رابطه فیثاغورس طول ارتفاع وارد بر قاعده $\sqrt{8}$ می‌شود که این ارتفاع از قاعده بزرگتر است و حکم رد می‌شود.

$$\begin{aligned} AH^2 + BH^2 &= AB^2 \rightarrow AH^2 + 1 = 9 \rightarrow AH^2 = 8 \rightarrow AH = \sqrt{8} \\ &\rightarrow AH = 2\sqrt{2} \rightarrow AH > BC \end{aligned}$$



ت) مثلث مختلف‌الاضلاع

$\triangle ABC$ را به طور دلخواه رسم می‌کنیم و میانه و عمود منصف ضلع BC را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که این دو بر هم منطبق نیستند پس حکم رد می‌شود.



۳۵

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.
حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

اثبات: فرض می‌کنیم که حکم غلط باشد، یعنی از نقطه A دو عمود بر خط d رسم شده است (مانند شکل) که خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند.

در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگتر از 180° خواهد شد و این غیر ممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد، یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

۳۶

$$\widehat{C}_2 = \widehat{E}_2 \rightarrow \triangle AEC = \text{متساوی الساقین} \rightarrow AC = AE = 6$$

$$\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 \rightarrow AC = \text{مورب}, AD \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{15}{6} \rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{5}{2}$$

۳۷

$$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{AP}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{AP = 4}$$

$$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{PQ}{9} \rightarrow \boxed{PQ = \frac{18}{5}}$$

۳۸

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{4x-1}{4x+1} = \frac{3x+3}{8x+2}$$

$$\rightarrow (4x-1)(8x+2) = (3x+3)(4x+1)$$

$$\rightarrow 32x^2 + 8x - 4x - 2 = 12x^2 + 3x + 12x + 3 \rightarrow 20x^2 - 15x - 5 = 0$$

$$\rightarrow 5(4x^2 - 3x - 1) = 0 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(4x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ 4x+1=0 \rightarrow x = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

غیر قابل قبول زیرا $AD < 0$ و $DB = 0$ می‌شود.

۳۹

الف نادرست

۴۰

$$\frac{x+2}{2x+9} = \frac{x}{2x+4} \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{x}{3x+4} = \frac{y}{14} \Rightarrow \frac{8}{28} = \frac{y}{14} \Rightarrow y = 4$$

۴۱

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۱۰} = \frac{۶}{۲x+۵}$$

$$۲x+۵ = \frac{۶ \times ۱۰}{۴} = ۱۵ \Rightarrow x = ۵$$

$$\frac{AS}{SB} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{y}{۹}$$

$$y = ۶$$

۴۲

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CE}{AC} = \frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AB} \rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۳} = \frac{x+۵}{۲x+۶} = \frac{y-۱}{y+۱}$$

$$\rightarrow ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۸ = ۲x^۲ + ۱۳x + ۱۵ \rightarrow x = ۳ \rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{y-۱}{y+۱} \rightarrow y = ۵$$

۴۳

$$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC}$$

$$\frac{۲x}{۵} = \frac{x+۴}{۷,۵} \Rightarrow ۵x+۲۰ = ۱۵x \Rightarrow ۱۰x = ۲۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$AI = ۲x \Rightarrow AI = ۴, \quad AJ = x+۴ \Rightarrow AJ = ۶$$

۴۴ چون $GH \parallel BC$ است، داریم:

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{CH} \Rightarrow CH = \frac{۱۰}{۳}$$

$$AC = ۲ + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۴۵ بنابر قضیه تالس در دوزنقه، داریم:

$$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳x-۱} = \frac{x+۳}{۵x+۱}$$

$$x(۵x+۱) = (x+۳)(۳x-۱) \Rightarrow ۵x^۲+x = ۳x^۲-x+۹x-۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۷x+۳=۰, \quad \Delta = ۴۹-۲۴=۲۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۷+۵}{۴} = ۳ \quad \checkmark \\ x = \frac{۷-۵}{۴} = \frac{۱}{۲} \quad \checkmark \end{cases}$$

۴۶

الف

$$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\frac{x}{x+۷} = \frac{x-۳}{x+۱} \rightarrow x^۲+x = x^۲+۴x-۲۱ \rightarrow x = ۷$$

ب

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APQ}} = \left(\frac{AB}{AP}\right)^۲ = \left(\frac{۲۱}{۷}\right)^۲ = ۹ \rightarrow S_{ABC} = ۹S_{APQ}$$

۴۷ الف از قضیه تالس برای به دست آوردن مقادیر مجهول استفاده می‌کنیم:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x+1}{2x} = \frac{x+4}{5x}$$

طرفین وسطین

$$\rightarrow (x+1) \times (5x) = (x+4)(2x)$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5x = 2x^2 + 8x \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x = 0$

ب از تعمیم قضیه تالس برای به دست آوردن مقادیر مجهول استفاده می‌کنیم:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{6+9} = \frac{x+1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{x+1}{12} \Rightarrow 72 = 15x + 15$$

$$\Rightarrow 15x = 72 - 15 = 57 \Rightarrow x = \frac{57}{15} = \frac{19}{5} = 3,8$$

پ از تعمیم قضیه تالس برای به دست آوردن مقادیر مجهول استفاده می‌کنیم:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+(x+7)} = \frac{x-3}{(x-3)+(x+1)} = \frac{2x}{y+3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2x+7} = \frac{x-3}{2x-2} = \frac{2x}{y+3}$$

از تساوی $\frac{x}{2x+7} = \frac{x-3}{2x-2}$ مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{2x+7} = \frac{x-3}{2x-2} \Rightarrow x(2x-2) = (2x+7)(x-3)$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^2} - 2x = \cancel{2x^2} - 6x + 7x - 21 \Rightarrow -3x = -21 \Rightarrow x = \frac{-21}{-3} = 7$$

از تساوی $\frac{x-3}{2x-2} = \frac{2x}{y+3}$ مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$x = 7, \frac{x-3}{2x-2} = \frac{2x}{y+3} \Rightarrow \frac{7-3}{14-2} = \frac{14}{y+3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{14}}{\cancel{14}} = \frac{14}{y+3} \Rightarrow y+3 = 42 \Rightarrow y = 42 - 3 = 39$$

۴۸

الف نادرست

ب درست

پ نادرست

ت نادرست

ث درست

ج درست

۴۹

الف استنتاجی

۵۰

الف درست



۵۱

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{y}{5} \rightarrow y = 2,5$$

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{8} \rightarrow y = \frac{8}{3}$$

۵۲ کافیت ۴۱ n یا مضرب ۴۱ انتخاب شود.

۵۳ گزینه د ج

۵۴

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow c^2 = (d+e)d \rightarrow c^2 = (5+3) \times 5 \rightarrow c^2 = 40 \rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow b^2 = (d+e)e \rightarrow b^2 = (5+3) \times 3 \rightarrow b^2 = 24 \rightarrow b = 2\sqrt{6}$$

۵۵

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE}$$

$$\rightarrow \frac{16}{y} = \frac{BD+y}{14} \rightarrow BD+y = 22 \rightarrow \boxed{BD = 25}$$

۵۶

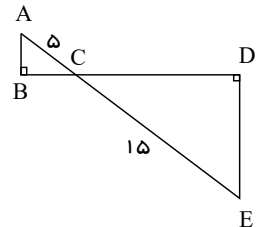
$$\left. \begin{matrix} \hat{DAE} = \hat{BAE} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{2}{4} = \frac{DE}{8} \rightarrow \boxed{DE = 4}$$

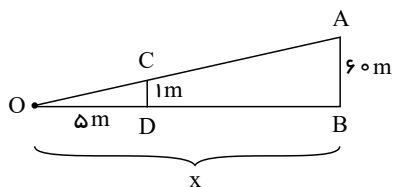
۵۷

$$\triangle DEC \sim \triangle ABC \rightarrow k = \frac{CE}{AC} = \frac{15}{5} \rightarrow K = 3$$

$$\frac{P_{\triangle DEC}}{P_{\triangle ABC}} = K = 3, \quad \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = K^2 = 9$$



۵۸



$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{60} \rightarrow \boxed{x = 300m}$$

۵۹

$$\left. \begin{matrix} \hat{H}' = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{A} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABH' \sim \triangle AEH \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BH'}{EH} = \frac{AH'}{AH}$$

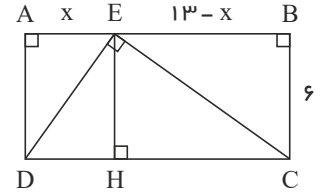
$$\rightarrow \frac{AB}{AD+DE} = \frac{BH'}{EH} \rightarrow \frac{6}{8+y} = \frac{x}{y} \rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{1}{2}}$$

۶۰ اگر $AE = x$ و $BE = 13 - x$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$EH^2 = DH \cdot HC = EH^2 = AE \cdot BE \rightarrow 6^2 = x(13 - x)$$

$$\rightarrow 36 = 13x - x^2 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \begin{cases} \text{یا} \\ \text{غ} \end{cases} \begin{cases} x = 4 \rightarrow \boxed{AE = 4} \text{ قق} \\ x = 9 \rightarrow \boxed{AE = 9} \text{ قق} \end{cases}$$



۶۱

$$\triangle BCE : CE^2 = BE^2 + BC^2 \rightarrow 2^2 = 1^2 + BC^2 \rightarrow BC^2 = 3 \rightarrow \boxed{BC = \sqrt{3}}$$

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{ACD} = \hat{BCE} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BCE \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{CE}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2} \rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{x = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

۶۲

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow h^2 = d \cdot e \rightarrow (5)^2 = 7e \rightarrow \boxed{e = \frac{25}{7}}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow c^2 = (d + e) \cdot d \rightarrow c^2 = \left(7 + \frac{25}{7}\right) \times 7 \rightarrow c^2 = 49 + 25$$

$$\rightarrow c^2 = 74 \rightarrow \boxed{c = \sqrt{74}}$$

۶۳

الف

$$BC = BH + HC \rightarrow 10 = 9 + HC \rightarrow HC = 1$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow AH^2 = 9 \times 1 \rightarrow \boxed{AH = 3}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow AB^2 = 10 \times 9 \rightarrow AB = \sqrt{90} \rightarrow \boxed{AB = 3\sqrt{10}}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow AC^2 = 10 \times 1 \rightarrow \boxed{AC = \sqrt{10}}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow 5^2 = BC \times 2 \rightarrow \boxed{BC = 12,5}$$

$$BC = BH + CH \rightarrow 12,5 = BH + 2 \rightarrow \boxed{BH = 10,5}$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow AH^2 = 10,5 \times 2 \rightarrow AH^2 = 21 \rightarrow \boxed{AH = \sqrt{21}}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow AB^2 = 12,5 \times 10,5 \rightarrow AB^2 = 131,25$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{21 \times 6,25} \rightarrow \boxed{AB = 2,5\sqrt{21}}$$

ب

یا

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \rightarrow AB \times 5 = 12,5 \times \sqrt{21} \rightarrow \boxed{AB = 2,5\sqrt{21}}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \rightarrow BC^2 = 100 \rightarrow \boxed{BC = 10}$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \rightarrow 8 \times 6 = 10 \times AH \rightarrow \boxed{AH = 4,8}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow 6^2 = 10 \times CH \rightarrow \boxed{CH = 3,6}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow 8^2 = 10 \times BH \rightarrow \boxed{BH = 6,4}$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow 12^2 = 6^2 + BH^2 \rightarrow BH^2 = 144 - 36 \rightarrow BH^2 = 108$$

$$\rightarrow \boxed{BH = 6\sqrt{3}}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow 12^2 = BC \times 6\sqrt{3} \rightarrow BC = \frac{144}{6\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{BC = 8\sqrt{3}}$$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \rightarrow 12 \times AC = 6 \times 8\sqrt{3} \rightarrow \boxed{AC = 4\sqrt{3}}$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow 12^2 = x^2 + 11^2 \rightarrow x^2 = 144 - 121$$

$$\rightarrow x^2 = 23 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{23}}$$

$$\triangle ADH \sim \triangle ABH \rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AD}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{23}}{11} = \frac{y}{12} \rightarrow \boxed{y = \frac{12}{11}\sqrt{23}}$$

$$\text{الف) } \frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = 2 \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{F} = 20^\circ \rightarrow \boxed{y = 20^\circ} \\ \hat{C} = \hat{E} = 6^\circ \\ \hat{A} = \hat{D} \rightarrow \boxed{x = 100^\circ} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \left. \begin{array}{l} \hat{ACB} = \hat{DCE} \\ \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{DE}$$

$$\rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{x} = \frac{2,5}{x} \rightarrow \boxed{x = 5}$$

$$\text{ب) } \left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{ACB} = \hat{DCE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE}$$

$$\rightarrow \frac{4}{12} = \frac{x}{16} = \frac{20}{y} \rightarrow x = \frac{16 \times 4}{12} \rightarrow \boxed{x = \frac{16}{3}}$$

$$\rightarrow y = \frac{12 \times \frac{r_0}{r}}{4} \rightarrow \boxed{y = 20}$$

۶۶

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow \frac{x}{12} = \frac{x-2}{9}$$

$$\rightarrow 9x = 12x - 24 \rightarrow 24 = 3x \rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2 = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \left(\frac{8}{12}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{4}{9}}$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = k \rightarrow \frac{15}{8} = k$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2 \rightarrow \frac{25}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \rightarrow \frac{25}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{225}{64} \rightarrow \boxed{S_{\triangle A'B'C'} = \frac{64}{9}}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = K \rightarrow \frac{5}{20} = K \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$

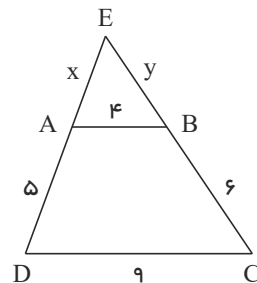
$$\rightarrow \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = K \rightarrow \frac{5+7+11}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P_{\triangle A'B'C'} = 92 \text{ cm}}$$

$$AB \parallel DC \rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 9x = 4(x+5) \rightarrow 9x = 4x+20 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$9y = 4(y+6) \rightarrow 9y = 4y+24 \rightarrow 5y = 24 \rightarrow \boxed{y = 4,8}$$

$$P_{\triangle ABE} = AB + AE + BE = 4 + 4 + 4,8 \rightarrow \boxed{P_{\triangle ABE} = 12,8}$$



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \rightarrow 60 = \frac{x \times 3x}{2} \rightarrow 3x^2 = 120 \rightarrow x^2 = 40$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = x^2 + (3x)^2 = x^2 + 9x^2$$

$$\rightarrow BC^2 = 10x^2 \rightarrow BC^2 = 10 \times 40 = 400 \rightarrow \boxed{BC = 20}$$

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC \rightarrow 60 = \frac{AH \times 20}{2} \rightarrow \boxed{AH = 6}$$

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FG} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{AD}{AD+BD} = \frac{3}{3+2}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5} = K$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = K^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{9}{25}}$$

۶۷

۶۸

۶۹

۷۰

۷۱

۷۲

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel BD \rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{BDE} \\ \widehat{CEA} = \widehat{BED} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle BDE$$

$$\rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{CH}{DK} \rightarrow \frac{AE}{AE+BE} = \frac{CH}{CH+DK} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{3}{3+5} \rightarrow \frac{AE}{20} = \frac{3}{8} \rightarrow \boxed{AE = 7,5}$$

$$\rightarrow S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} AE \times CH = \frac{1}{2} \times 7,5 \times 3 \rightarrow \boxed{S_{\triangle ACE} = \frac{45}{4}}$$

۷۳

$$P_{\triangle ABC} = 5 + 6 + 9 = 20 \rightarrow K = \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \rightarrow \frac{5}{A'B'} = \frac{6}{A'C'} = \frac{9}{B'C'} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \boxed{A'B' = 12,5}, \boxed{A'C' = 15}, \boxed{B'C' = 22,5}$$

۷۴

$$AC^r = CH \cdot BC \rightarrow AC^r = CH(CH + BH)$$

$$\rightarrow 6^r = CH(CH + 5) \rightarrow 36 = CH^r + 5CH$$

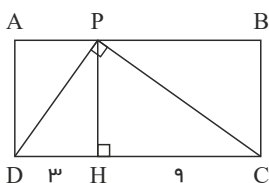
$$\rightarrow CH^r + 5CH - 36 = 0 \rightarrow (CH - 4)(CH + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} CH = 4 \\ CH = -9 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\rightarrow AH^r = CH \cdot BH \rightarrow AH^r = 4 \times 5 \rightarrow AH^r = 20 \rightarrow \boxed{AH = 2\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow AB^r = BH \cdot BC \rightarrow AB^r = 5 \times 9 \rightarrow AB^r = 45 \rightarrow \boxed{AB = 3\sqrt{5}}$$

۷۵

از نقطه‌ی P، عمود PH را بر ضلع DC رسم می‌کنیم و داریم:



$$\triangle DPC : DP^r = DH \cdot DC \rightarrow DP^r = 3 \times 12 \rightarrow DP^r = 36 \rightarrow \boxed{DF = 6}$$

۷۶

$$AH^r = BH \cdot CH \rightarrow AH^r = 1,8 \times 3,2 \rightarrow AH^r = 5,76 \rightarrow \boxed{AH = 2,4}$$

$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow AB^r = (BH + CH) \cdot BH \rightarrow AB^r = (1,8 + 3,2) \times 1,8$$

$$\rightarrow AB^r = 9 \rightarrow \boxed{AB = 3}$$

$$AC^r = BC \cdot CH \rightarrow AC^r = (BH + CH) \cdot CH \rightarrow AC^r = (1,8 + 3,2) \times 3,2$$

$$\rightarrow AC^r = 16 \rightarrow \boxed{AC = 4}$$

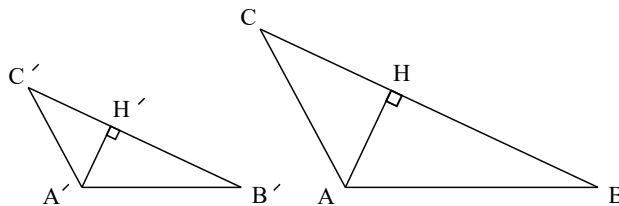
۷۷

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{CD} \quad (1)$$

$$\triangle DEC : EC^r = DE^r + DC^r \rightarrow 10^r = 6^r + DC^r \rightarrow DC^r = 64 \rightarrow DC = 8$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{9}{6} = \frac{x+8}{10} = \frac{BC}{8} \rightarrow 6(x+8) = 9 \times 10 \rightarrow x+8 = 15 \rightarrow \boxed{x = 7}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$$



$$\text{ب) } \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = K \rightarrow \boxed{\frac{AH}{A'H'} = K}$$

$$\text{پ) } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{\frac{1}{2}B'C' \cdot A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AH}{A'H'} = K^2 \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = K^2}$$

$$\text{ت) } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \rightarrow AB = A'B' \cdot K, AC = A'C' \cdot K, BC = B'C' \cdot K$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{K(A'B' + A'C' + B'C')}{A'B' + A'C' + B'C'} \rightarrow \boxed{\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = K}$$

۷۹

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2 \rightarrow \frac{49}{121} = k^2 \rightarrow \boxed{k = \frac{7}{11}}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = k \rightarrow \frac{21}{A'B'} = \frac{7}{11} \rightarrow \boxed{A'B' = 33 \text{ cm}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = 70^\circ, \widehat{B} = 50^\circ \rightarrow \widehat{C} = 60^\circ \\ \widehat{M} = 70^\circ, \widehat{N} = 60^\circ \rightarrow \widehat{P} = 50^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP, \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{9}{4} = K^2 \rightarrow \boxed{k = \frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{MP} = K \rightarrow \frac{18}{MP} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{MP = 12}$$

 $\triangle ACE$ قائم الزاویه

$$\rightarrow AD \cdot DE = DC^2 \rightarrow 1 \times x = 2^2 \rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow BC = \frac{10^2}{6\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

$$CH = BC - BH = 2\sqrt{3}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} = 48 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ABC, \triangle EDC \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle B = \angle D = 90^\circ \\ \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \end{array} \right. \rightarrow \text{دو مثلث متشابه هستند} \rightarrow \text{دو زاویه}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC \rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{EC}{AC} = \frac{12}{4} = 3 = K \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = K^2 = 9$$

این دو مثلث متشابه‌اند؛ یعنی: $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$. زیرا:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}' , \widehat{B} = \widehat{B}' , \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases} \quad (1)$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}'' , \widehat{B} = \widehat{B}'' , \widehat{C} = \widehat{C}'' \\ \frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B''C''} \end{cases} \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) نتیجه می‌گیریم $\widehat{C} = \widehat{C}''$ و $\widehat{A} = \widehat{A}''$, $\widehat{B} = \widehat{B}''$ پس دو مثلث ABC و $A''B''C''$ متشابه‌اند.

طبق فرض داریم $AN = NC$ و $AM = MB$ و $PC = BP$ بنا بر این:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بنابر عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC$$

$$\frac{CN}{AC} = \frac{PC}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بنابر عکس قضیه تالس}} NP \parallel AB$$

$$\frac{BM}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بنابر عکس قضیه تالس}} MP \parallel AC$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ \text{مورب } MP \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{P}_2 = \widehat{M}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} MP \parallel AC \\ \text{مورب } BC \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{P}_2 = \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{P}_2 = \widehat{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ \text{مورب } NP \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{P}_3$$

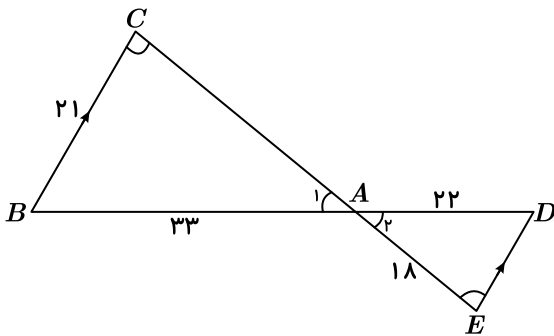
$$\left. \begin{array}{l} NP \parallel AB \\ \text{مورب } BC \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{P}_3 = \widehat{B}$$

$$\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{P}_3 = \widehat{B}$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{C} , \widehat{N}_1 = \widehat{B} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \triangle MNP \sim \triangle ABC$$

دو مثلث ABC و ADE به دلیل داشتن دو زاویه برابر متشابه هستند.



$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel DE \\ \text{مورب } CE \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{C} = \widehat{E} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ متقابل به رأس} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{21}{DE} = \frac{CA}{18} = \frac{33}{22} \Rightarrow DE = \frac{21 \times 22}{33} = 14 , \quad CA = \frac{18 \times 33}{22} = 27$$

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow h^2 = d \times e \Rightarrow e = \frac{h^2}{d} = \frac{25}{7}$$

$$AC^2 = BC \times HC \Rightarrow b^2 = (d+e)e = 8 \times 3 \Rightarrow b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow c^2 = d(d+e) = 5 \times 8 \Rightarrow c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

ب

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow BC = \sqrt{c^2 + b^2} \Rightarrow BC = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\Rightarrow d + e = 10, AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow cb = h(d + e)$$

$$8 \times 6 = h \times 10 \Rightarrow h = \frac{48}{10} = 4,8$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = C_2 \\ B = E \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \xrightarrow{BC=x} \frac{x}{4-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BC}{\underbrace{BC+CE}_4} = \frac{3}{4} \Rightarrow BC = 3$$

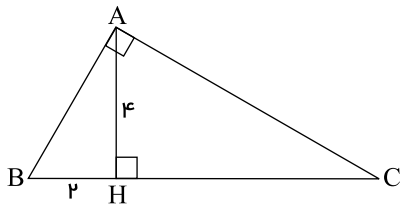
$$DC^2 = DB^2 - BC^2 = 16 \rightarrow DC = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = D_2 \\ A = C \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle CDB \rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DB} \rightarrow \frac{AD}{4} = \frac{4}{5}$$

$$AD = \frac{16}{5}$$

$$AC^2 = HC \times BC \rightarrow 36 = 4 \times BC \rightarrow BC = 9$$

$$AB^2 = BH \times BC \rightarrow AB^2 = 5 \times 9 \rightarrow AB = 3\sqrt{5}$$



$$AH^2 = BH \cdot HC \rightarrow 4^2 = 2 \times HC \rightarrow HC = 8$$

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AH^2 = BH \times HC \rightarrow 36 = 9 \times HC \rightarrow HC = 4 \rightarrow BC = 13$$

$$AC^2 = HC \times BC \rightarrow AC^2 = 4 \times 13 \rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

راه حل اول: ب

راه حل دوم:

۸۹

۹۰

۹۱

گزینه «ب» ۹۲

۹۳