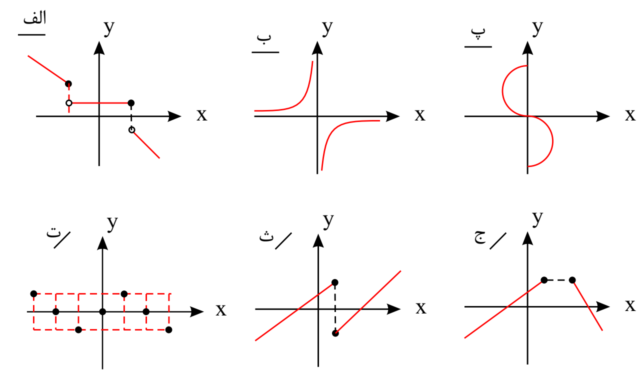
فصل سوم : توابع

فصل سوم : توابع

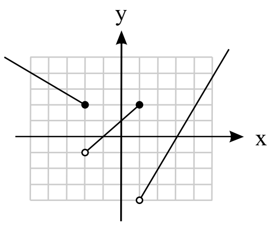
درس اول : آشنایی با برخی از انواع تابع | یادآوری از تابع سال دهم

۱ کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟



۲ نمایش جبری تابع f را بنویسید در صورتی که تابع f خطی باشد و از نقاط $(2,5)$ و $(-1,-7)$ بگذرد.

۳ ضابطه و دامنه و برد تابع مربوط به نمودار روبرو را بنویسید.



۴ در تابع $f(x)=3x^2-5x+1$ مقادیر $f(0)$، $f(1)$، $f(2)$، $f(-1)$ و $f(-3)$ را بدست آورید.

۵ به ازای چه مقادیری از a و b رابطه‌ی زیر یک تابع است؟

$$f=\{(2,a-b),(a,2b+a),(2,3),(a,2a-1)\}$$

توابع گویا - رادیکالی - چند ضابطه ای و دامنه ی تعریف آن ها

۶ دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

الف $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{10-2x}$

ب $g(x)=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$

پ $h(x)=\dfrac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{2x-6}}$

ت $k(x)=\sqrt{\dfrac{2x-16}{2-x}}$

ث $y=\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$

ج $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{1+|x|}}$

۷ دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ را به‌دست آورید.

۸ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R}-\{-1\}$ شود.

۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ و با دامنهٔ $D_f=[-۵,۵]-\{۰\}$ را رسم کنید.

۱۰ با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y=\sqrt{x}-۲$, $y=-۳+\sqrt{x-۴}$, $y=\sqrt{x+۱}+۳$

$y=-\sqrt{x}-۱$, $y=-\sqrt{x+۶}-۱$

۱۱ دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

الف
$$f(x)=\frac{\sqrt{۵}}{x}$$

ب
$$f(x)=\frac{x}{x+۵}$$

پ
$$g(x)=\frac{x^۲+۳x+۲}{x-۱}$$

ت
$$h(x)=\frac{x-۳}{x^۲+۴}$$

ث
$$k(x)=\frac{۴x^۲+۳}{x^۲-۳x-۱۰}$$

ج
$$l(x)=\frac{۳}{x^۲+x+۲}$$

چ
$$r(x)=\frac{x^۲+۳x+۶}{x^۲-۴x+۴}$$

ح
$$u(x)=\frac{۶x+۱۵}{x^۲+۲x-۱۵}$$

خ
$$f(x)=\frac{۲x^۲+۵}{x^۴-۵x^۲+۴}$$

۱۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

۱۳ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۸}$$

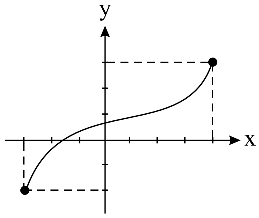
۱۴ اگر نمودار تابع $y=-۳+\sqrt{x+۲}$ از نقطهٔ $P(a,۰)$ بگذرد، مقدار a را بدست آورید.

۱۵ اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x}$ باشد، مقدار $f(۰)$، $f(۱)$، $f(۲)$ و $f(۸)$ را بدست آورید.

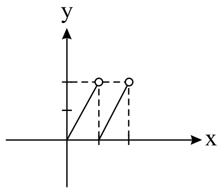
۱۶ اگر $f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳}$ باشد، مقدار $f(۲-\sqrt{۳})$ را بدست آورید.

۱۷ در هر یک از شکل‌های زیر، دامنه و برد را تعیین کنید.

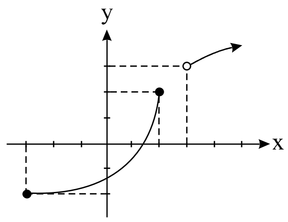
الف



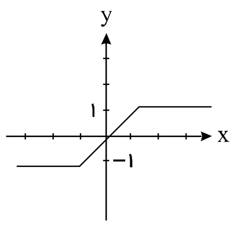
ب



پ



ت



۱۸ دامنهٔ تابع گویای $y=\dfrac{۵}{۱+۳x^۲}$ را بنویسید.

۱۹ دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده‌شده را به دست آورید.

الف $f(x)=\dfrac{x}{x+۵}$ $\quad D_f=$

ب) $g(x)=\dfrac{۳}{x-۴}$ $\quad D_g=$

۲۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\sqrt{x+b}$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار این تابع از نقطهٔ $(۱,-۲)$ بگذرد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۲۱ حدود m را چنان مشخص کنید که دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^۲+mx+m}$ برابر $\mathbb{R}$ شود.

۲۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۴x-۱}{x^۲+ax+b}$، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۵\}$ می‌باشد. a و b را به دست آورید.

۲۳ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف دامنهٔ تابع $h(x)=\dfrac{۱}{x^۲+x}$ برابر مجموعه .... است.

تساوی دو تابع

۲۴ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

ب) $f(x)=x-۲\ ,\quad g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x+۲}$

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}\ ,\quad g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

۲۵ آیا دو تابع $f(x)=(\sqrt{x})^۲$ و $g(x)=|x|$ با هم برابرند؟

۲۶ آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $h(x)=|x|$ با هم برابرند؟

۲۷ آیا دو تابع $f(x)=\frac{۳(x^۲-۱)}{x-۱}$ و $g(x)=۳x+۳$ با هم برابرند؟

۲۸ براساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی برحسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S=۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا برحسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۳}\simeq ۱/۷\ ,\ \sqrt{۲}\simeq ۱/۴)$

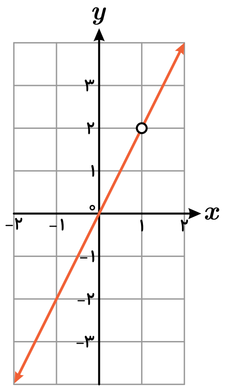
d	۱	۲	۳	۴
$S=۳۵۶\sqrt{d}$	....	۴۹۸/۴	....	....

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

«چون هر عدد، تنها .... ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع ....»

پ) کدام‌یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟

۲۹ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $D_g=\mathbb{R}$ $\quad g(x)=۲x$

ب) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\quad g(x)=۲x$

پ) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\quad g(x)=۲x$

ت) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\quad g(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱}$

ث) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\quad g(x)=\frac{۲x^۲-۴x}{x-۲}$

۳۰ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟

۳۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف برای هر عدد حقیقی k، داریم: $[x+k]=[x]+k$. ($[x]$ نشان‌دهندهٔ جزء صحیح x است.)

ب دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند.

۳۲ در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید دو تابع داده‌شده با هم برابر هستند یا خیر.

الف

$f(x)=\frac{x-۱}{x-۱}$ و $g(x)=۱$

ب

$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+۱}$ و $g(x)=x-۱$

پ

$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\frac{x}{|x|}$

ت

$f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x^۲+۲x+۱}$

۳۳ در هر یک از قسمت‌های زیر، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که دو تابع داده‌شده با هم برابر باشند.

الف

$$g(x)=x+۲,\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ax-۱ & x=b\end{cases}$$

ب

$$g(x)=3x+b\ ,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^2-1}{3x+1} & x\neq -\dfrac{1}{3}\\ a & x=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

۳۴) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) توابع $y=\sqrt{x^2}$ و $y=x$ مساوی هستند.

۳۵) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.

ب) دو تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند.

۳۶) درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-x}$ با هم برابرند.

۳۷) آیا دو تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ و $g(x)=x-2$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

توابع پله ای و تابع جزءصحیح

۳۸) مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید.

$[x+2]=5$

$-2[x-1]=6$

$[2x-3]=1$

۳۹) حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$[300/4002]$ $\quad$ $[-103/003]$ $\quad$ $[-2309/54]$

۴۰) تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x+2]$ و دامنهٔ $D=[-3,3)$ را رسم کنید.

۴۱) تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}3 & x\in[0,1)\\ 0 & x\in[1,5]\\ 2 & x\in(6,7]\end{cases}$$

۴۲) نمودار تابع $y=2[x]+1$ را در بازه‌ی $[-1,2]$ رسم کنید.

۴۳) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$[2\sqrt{3}-1]$ $\quad$ $[\sqrt{2}+3]$

$\left[-\dfrac{49}{16}\right]$ $\quad$ $\left[\dfrac{\pi}{2}+4\right]$

$[-\sqrt{7}-2]$ $\quad$ $[1/5+\sqrt{2}]$

$\left[-\dfrac{\pi}{3}\right]$

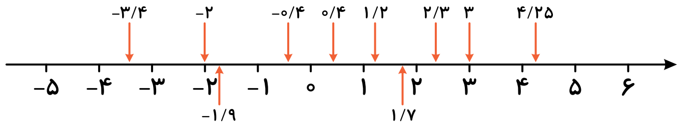
۴۴) اگر $x=-\dfrac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\big|[5x]\big|-[7x]\big|$ را بدست آورید.

۴۵) نمودار تابع $y=1-2[x]$ را در بازه $(-1,2)$ رسم کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

۴۶ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] =$ $\qquad$ $\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] =$

۴۷ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته‌شده را به دست آورید.



$[-۰٫۴] =$ $\quad [۰٫۴] =$ $\quad [-۱٫۹] =$ $\quad [-۲] =$ $\quad [-۳٫۴] =$

$[۱٫۲] =$ $\quad [۱٫۷] =$ $\quad [۲٫۳] =$ $\quad [۳] =$ $\quad [۴٫۲۵] =$

۴۸ نمودار تابع $y = [x] - ۲$ را در بازهٔ $[۰, ۳)$ رسم کنید.

۴۹ نمودار هر یک از توابع زیر را در بازهٔ $[-۲, ۲)$ رسم کنید.

الف $y = [x] + ۱$

ب $y = ۲[x] - ۳$

پ $y = x + [x]$

ت $y = x - [x]$

۵۰ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف $[x] = ۳$

ب $\left[\frac{x+۱}{۲}\right] = -۱$

پ $[۲x - ۱] = ۵$

ت $۲[x] + ۵ = ۰$

۵۱ برد تابع $f(x) = [x]$ کدام است؟

الف) اعداد حقیقی $\qquad$ ب) اعداد گویا $\qquad$ ج) اعداد طبیعی $\qquad$ د) اعداد صحیح

درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک | تابع یک به یک

۵۲ نمودار تابعی با دامنهٔ $[۰, ۲]$ و برد $[۲, ۵]$ را رسم کنید:

الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.

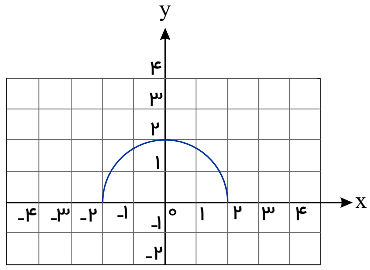
۵۳ یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان وارون آنها را بنویسید.

$f = \{(۱, ۴), (۲, ۷), (۶, ۹), (۵, ۱۲)\}$

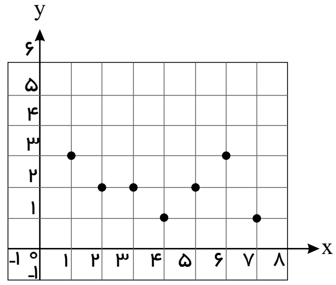
$g = \{(۲, ۳), (۴, ۹), (۷, -۱), (۵, ۹)\}$

۵۴ اگر تابع $f = \{(۳, ۵), (۴, -۶), (a+۱, ۵), (۲a, ۳b)\}$ یک به یک باشد، a و b را بدست آورید.

۵۵ با حذف بخشی از نمودار نیم دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



۵۶ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟



۵۷ اگر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک به یک باشد، m و a را بدست آورید.

۵۸ a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر یک‌به‌یک باشد.

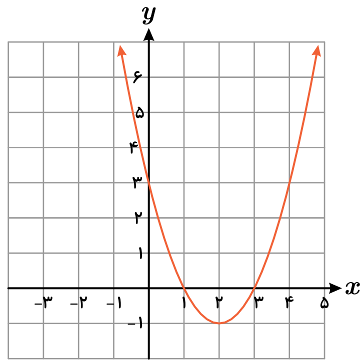
$$f=\left\{(۱,۴)(۲,a+۳)(b^{۲}-۳,۴)(۲,b+۱)(۳,a+b)\right\}$$

۵۹ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف هر تابع خطی غیرثابت، یک به یک است.

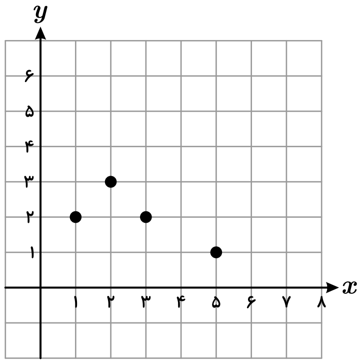
۶۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف هر تابع درجه دوم یک به یک هست.



۶۱ به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ در شکل مقابل، دقت کنید. با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[۰,۲]$ ☐ $[۱,۴)$



۶۲ الف) چرا نمودار داده‌شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.

پ) مسئله چند جواب دارد؟

۶۳ اگر تابع $f=\{(۱,a+۲b),(-۲,۳),(۲a-b,۳),(۱,۴),(۲,۵)\}$، تابعی یک‌به‌یک باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۶۴ اگر $g=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۱)\}$ و $f=\{(۲,-۱),(۳,۱,),(۱,۰),(۴,۲)\}$ دو تابع باشند، آنگاه:

الف تابع‌های $f\times g$, $\frac{g}{f}$ را به صورت مجموعه‌هایی از زوج مرتب‌ها بنویسید.

ب آیا تابع g یک تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

۶۵ کدام‌یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک به یک است؟

الف) $f(x)=x^{۲}$ ب) $f(x)=[x]$ ج) $f(x)=|x|$ د) $f(x)=۲^{x}$

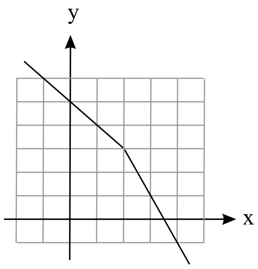
تابع وارون

۶۶ اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(۱)=۵$ و $f^{-۱}(۹)=۳$، آنگاه ضابطه‌ی f و $f^{-۱}$ را بدست آورید.

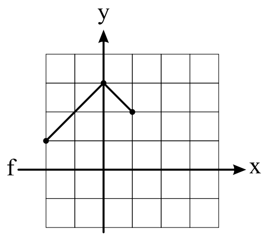
۶۷ اگر نمودار تابع f به صورت روبرو باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $f^{-۱}(۱)+f^{-۱}(-۱)=$

ب) $۲f^{-۱}(۴)+۳f^{-۱}(۳)=$



۶۸ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



۶۹ وارون تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۳$ را بدست آورید.

۷۰ اگر $f(x)=x\,|x|$ باشد، نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را رسم کنید.

۷۱ ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=(x+۱)^{۳}-۴ \end{cases}$$

۷۲ ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^{\geq ۲}\to\mathbb{R}^{\geq ۰} \\ f(x)=(x-۲)^{۲} \end{cases}$$

۷۳ وارون هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

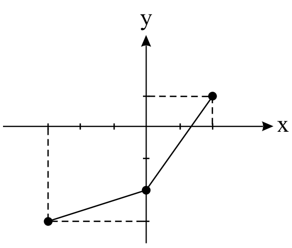
$$f(x)=\frac{۱-۲x}{۵}$$

$$g(x)=-۳x+۱$$

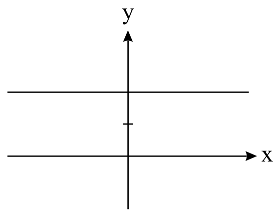
$$۳y+۴x+۱۲=۰$$

۷۴ تعیین کنید کدام نمودار وارون‌پذیر است، سپس وارون آن را رسم کنید.

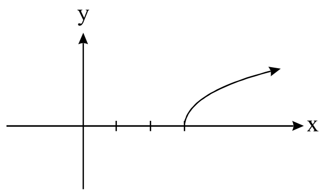
الف



ب



پ



۷۵ ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۵x - ۲$

ب) $f(x) = \frac{۳}{۵}x + ۴$

پ) $f(x) = \frac{-۷x + ۳}{۵}$

۷۶ وارون تابع $f = \{(۲,۳), (-۲,۱), (-۱,۲)\}$ را بدست آورید.

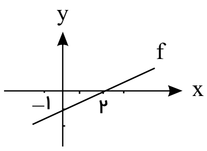
۷۷ در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$ اگر $f^{-۱}(۴) = a$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۷۸ اگر وارون تابع خطی f از نقاط $(-۳,۲)$ و $(۹,-۱)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع f را بنویسید.

۷۹ اگر f تابعی یک به یک باشد و $f(-۲) = ۵$ و $f^{-۱}(۴a - ۷) = -۲$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۸۰ اگر تابع خطی f از نقاط $(-۱,۴)$, $(۲,-۲)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع وارون آن را بدست آورید.

۸۱ اگر نمودار تابع f بصورت شکل روبرو باشد، ضابطهٔ وارون آن را بدست آورید.



۸۲ اگر وارون تابع $f(x) = ax + ۴$ از نقطه $(۵, \frac{۵}{۳})$ بگذرد آنگاه ضابطهٔ وارون f را به دست آورید.

۸۳ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{۲x - ۱}{۳}$ را بنویسید.

۸۴ نمودار تابع وارون، تابع خطی $f(x) = -x + m$ از نقطه $(۱$ و $-۳)$ می‌گذرد. ابتدا مقدار m را به دست آورید و سپس ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۸۵ وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s^{-۱} =$	$s = \{(۴,۱), (۱,۴), (۳,۳), (۲,۵)\}$
$t^{-۱} =$	$t = \{(۵,۱), (۱,۴), (۴,۳), (۲,۳)\}$
$u^{-۱} =$	$u = \{(۲,۳), (۵,۲), (۴,۱), (۳,۴)\}$

۸۶ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = ۳x - ۲$ کدام است؟

الف: $f^{-۱}(x) = -۳x + ۲$

ب: $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}x - \frac{۱}{۲}$

ج: $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}$

د: $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}$

۸۷ ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^{\geq -۲} \to \mathbb{R}^{\geq -۱} \\ f(x) = x^۲ + ۴x + ۳ \end{cases}$$

۸۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است، قرینهٔ نمودار آن را نسبت به .... رسم کنیم.

۸۹ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = 2x - 1$ به‌صورت .... است.

۹۰ با رسم نمودار هر یک از توابع زیر، مشخص کنید کدام‌یک از توابع زیر، تابعی یک‌به‌یک است؟ در توابع غیر یک‌به‌یک، دامنه‌ای مشخص کنید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک شود.

الف

$$y = 2x + 1$$

ب

$$f(x) = x^2 - 2x$$

پ

$$y = 2 + \sqrt{x+1}$$

ت

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$

ج

$$f(x) = |x - 1| + 1$$

چ

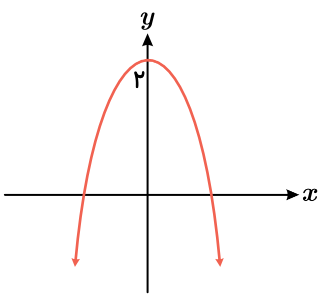
$$f(x) = [x]$$

ح

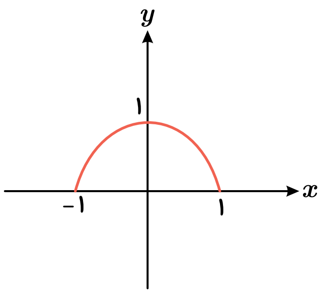
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x, 0 \end{cases}$$

۹۱ با حذف بخشی از نمودارهای زیر، نمودار یک تابع یک‌به‌یک با بزرگ‌ترین دامنه را مشخص کنید.

الف



ب



۹۲ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به دست آورید.

الف $f(x) = x + ۵$

ب $g(x) = ۴x$

پ $u(x) = ۲x + ۳$

ت $v(x) = \frac{۲}{۳}x - ۴$

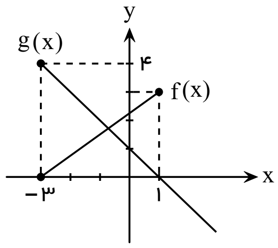
۹۳ اگر $f(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x + ۲}$ و $g(x) = x - ۲$ حاصل $g^{-۱}(۳) + f(-۳)$ را به دست آورید.

۹۴ اگر $f(x) = ۳x + ۵$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۸)$ را تعیین کنید.

درس سوم : اعمال جبری روی توابع

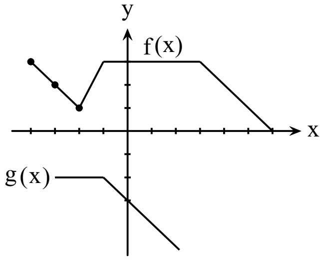
اعمال جبری روی توابع

۹۵ اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشد، نمودار $f + g$ را رسم کنید. (بدون تشکیل ضابطه)



۹۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x > ۰ \\ x - ۱ & x \leq ۰ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -۲ \\ x - ۱ & x < -۲ \end{cases}$ باشد، حاصل $(f + ۲g)(x)$ به ازای $x = f(۰)$ چقدر است؟

۹۷ با توجه به نمودار شکل زیر، هر یک از موارد خواسته شده را به‌دست آورید.

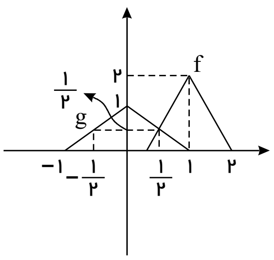


الف $(f - g)(۰)$

ب

$(\frac{f}{g})(-۱)$

۹۸ از روی نمودار داده شده، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.



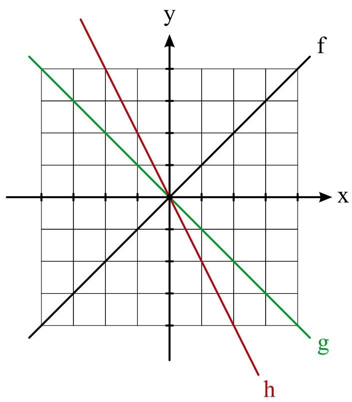
الف

$(f+g)(۱)$

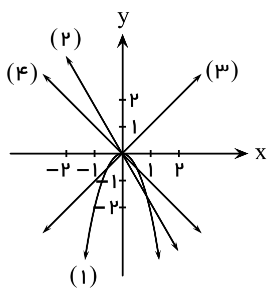
ب

$(f \times g)\left(\frac{۱}{۲}\right)$

۹۹ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آن‌ها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



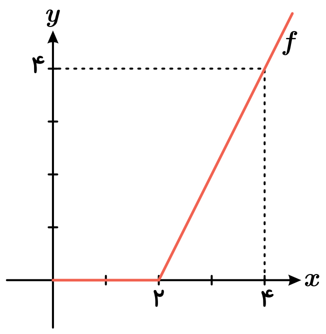
۱۰۰ در شکل مقابل، نمودار چهار تابع رسم شده است.

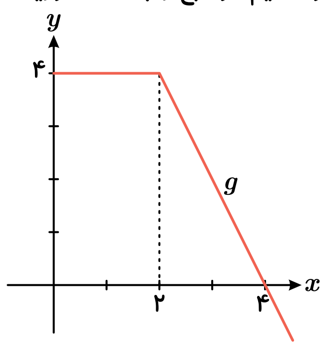


الف کدام‌یک از تفریق دو تابع دیگر به‌دست آمده است؟

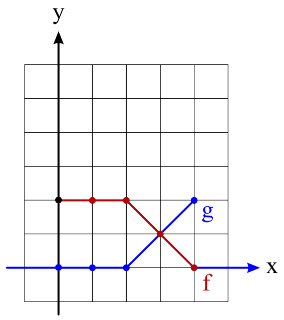
ب کدام‌یک از ضرب دو تابع دیگر به‌دست آمده است؟

۱۰۱ مطابق شکل زیر، دو تابع f و g داده شده‌اند. حاصل جمع، ضرب و تقسیم دو تابع را به‌دست آورید.



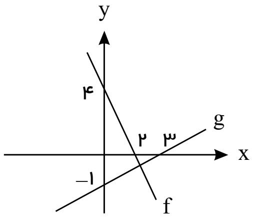


۱۰۲ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



۱۰۳ اگر $f(x)=\left|x^۲-۵\right|$ و $g(x)=\dfrac{x}{۱+x^۲}$ باشد مقدار $\dfrac{۱+f(-۲)}{g(۲)}$ را بدست آورید.

۱۰۴ اگر نمودار تابع f و g بصورت روبرو باشند، مطلوبست:الف – ضابطه و دامنه‌ی تابع $f+g$ ب – مقدار $(۳g-f)(۶)$



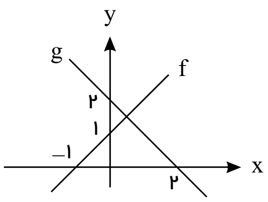
۱۰۵ اگر $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۴}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند، آن‌گاه مطلوبست محاسبه:

الف – دامنه و ضابطه‌ی تابع $\dfrac{f}{g}$ ب – دامنه و ضابطه‌ی تابع $\dfrac{g}{f}$

پ - $(۴f-۳g)(۶)$

۱۰۶ اگر $f=\{(-۱,۴),(۰,۵),(۱,۲),(۳,۱۰),(۴,-۲)\}$ و $g=\{(-۲,۶),(۰,۳),(۱,-۲),(۳,۲),(۵,۱)\}$ باشند، ابتدا تابع $f-۲g$ را بصورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و سپس مقدار $(\dfrac{f}{g})(۳)$ را بدست آورید.

۱۰۷ اگر نمودار دو تابع f و g بصورت روبرو باشد، مقدار $(f+۲g)(۳)$ را بدست آورید.



۱۰۸ اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=-۳x+۳$ باشد، دامنه و ضابطه‌ی تابع $\dfrac{f}{g}$ را بدست آورده و سپس مقدار $(۲f-g)(۰)$ را محاسبه کنید.

۱۰۹ اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۳}}$ و $g(x)=\dfrac{x-۱}{\sqrt{x+۳}}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را بدست آورید.

۱۱۰ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۴$ باشد، ابتدا تابع $\dfrac{f}{g}$ و دامنه‌ی آن را بدست آورده و سپس مقدار $(g-۳f)(۵)$ را محاسبه کنید.

۱۱۱ اگر $f=\{(۱,-۴),(۲,۷),(۳,۵),(۴,۹)\}$ و $g=\{(-۱,۳),(۰,۲),(۲,۴),(۳,۱)\}$ باشند، آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ و دامنه‌ی هر یک را مشخص کنید.

۱۱۲ اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۲}$ باشد، مقدار $(۲f-g)(۳)$ را بدست آورید.

۱۱۳ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف

$f(x)=|x| \quad , \quad g(x)=\dfrac{۱}{x}$

ب

$f(x) = x^۲ - ۴$

$g(x) = x + ۲$

پ

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = -\sqrt{x}$

ت

$f(x) = \frac{x-۲}{x+۵}$

$g(x) = x^۲ + ۳x - ۱۰$

ث

$g = \{(-۱, ۲), (۰, ۳), (۲, ۴), (۳, ۰)\}$

$f = \{(۲, ۵), (۳, ۴), (۰, -۲)\}$

۱۱۴ اگر $f(x) = \sqrt{x+۴}$ و $g(x) = \dfrac{x+۲}{x-۴}$، مطلوب است:

الف

$D_{\frac{f}{g}}$

ب

$D_{\frac{g}{f}}$

پ

$D_{\frac{f}{g}+\frac{g}{f}}$

ت

$(۲f - g)(۵)$

۱۱۵ اگر $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = \dfrac{۵x+۴}{x-۳}$ باشند آنگاه دامنه و ضابطهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ را به دست آورید.

۱۱۶ برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x) = \sqrt{x} + ۱$ و $v(x) = x - ۱$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x) =$	....
$u-v$	$(u-v)(x) =$	....
$v \cdot v$	$(u \cdot v)(x) =$	....
$\frac{u}{v}$	$(\frac{u}{v})(x) =$	....

۱۱۷ برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^۲ + ۳x + ۱$ و $g(x) = x - ۳$ جدول داده شده را کامل کنید.

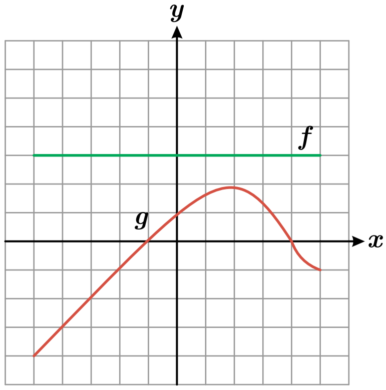
تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) =$	....
$f-g$	$(f-g)(x) =$	....
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) =$	....
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) =$	....

۱۱۸ دو تابع $f(x) = \dfrac{x}{x-۲}$ و $g(x) = ۲x - ۱$ مفروض‌اند

الف دامنهٔ تابع $f(x) + g(x)$ را بیابید.

ب) حاصل $g(۳) \times ۲f(۴)$ را به دست آورید.

۱۱۹) با توجه به نمودارهای توابع f و g:



الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

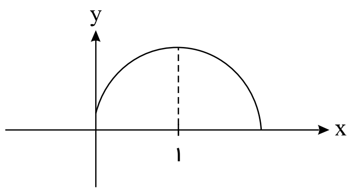
ب) مقدار $(f-۲g)(۰)$ را بیابید.

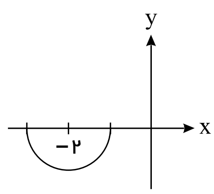
۱۲۰) اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۴$ باشد، ضابطه و دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

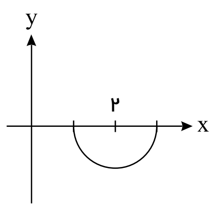
رسم توابع به کمک انتقال

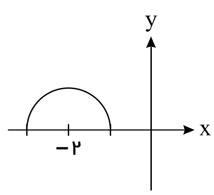
۱۲۱) نمودار سهمی $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۱$ را ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم، معادله‌ی آن را پس از انتقال بنویسید.

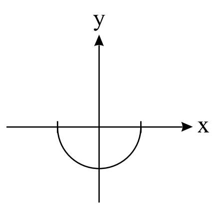
۱۲۲) شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ است. نمودار تابع $y=-f(-x-۱)$ در کدام گزینه آمده است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲۳) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۳-x}+۲$ را رسم کنید.

۱۲۴) با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

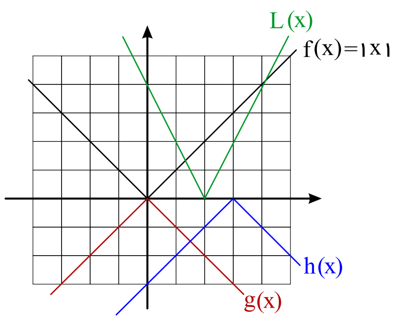
الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$

ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$

پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$

ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$



۱۲۵ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|$، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x - ۳|$ پ) $l(x) = ۲|x - ۲|$

۱۲۶ نمودار توابع زیر را با کمک نمودار تابع $y = |x|$ رسم کنید.

الف) $y = ۲\,|x + ۱|$

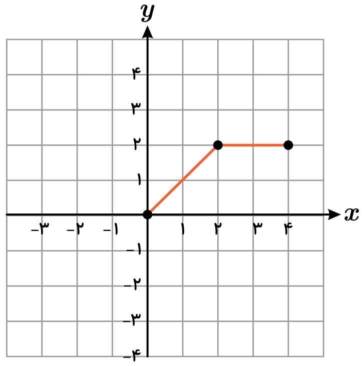
ب) $y = ۲ - |x|$

پ) $y = ۳ - |x + ۲|$

۱۲۷ نمودار سهمی $y = x^۲ + ۴x$ را ۳ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، معادله‌ی آن را پس از انتقال بنویسید.

۱۲۸ تابع $y = \sqrt{x + ۴} - ۱$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید.

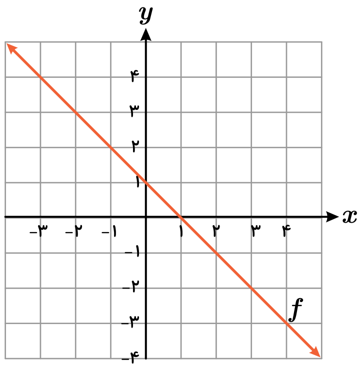
۱۲۹ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲f(x)$ را رسم کنید.



۱۳۰ عبارت زیر را کامل کنید.

«برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع ضابطهٔ $y = f(x)$ را نسبت به محور .... رسم کنیم.»

۱۳۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ را رسم کنید.



۱۳۲ نمودار تابع $f(x) = -۲ + \sqrt{x - ۱}$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه تابع را بیابید.

۱۳۳ نمودار تابع $f(x) = ۱ + \sqrt{۱ + x}$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنهٔ آن را بیابید.

۱۳۴ نمودار تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{x + ۱}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنهٔ آن را به‌صورت بازه بنویسید.

۱۳۵ نمودار تابع $f(x) = ۱ - \sqrt{x - ۳}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

پاسخنامه تشریحی

۱ الف) تابع است ب) تابع است پ) تابع نیست ت) تابع است ث) تابع نیست ج) تابع است

۲

$f(x)=ax+b$

$$\begin{cases} f(۲)=۵ \\ f(-۱)=-۷ \end{cases} \to \begin{cases} a(۲)+b=۵ \\ a(-۱)+b=-۷ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a+b=۵ \\ -a+b=-۷ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a+\cancel{b}=۵ \\ a-\cancel{b}=۷ \end{cases} +$$

$$۳a=۱۲ \to a=۴ \; , \; b=-۳$$

$$\to \boxed{f(x)=۴x-۳}$$

۳ نمودار تابع روبرو بصورت سه ضابطه‌ای می‌باشد و پیش از بدست آوردن ضابطه‌ها هم می‌توان دامنه و برد تابع را از روی شکل بدست آورد.

$$x\in\mathbb{R} \to \boxed{D_f=\mathbb{R}} \; , \; y>-۴ \to \boxed{R_f=(-۴,+\infty)}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -۵ \\ ۴ \end{bmatrix} \; , \; f_۱(x)=ax+b \to \begin{cases} -۲a+b=۲ \\ -۵a+b=۴ \end{cases} \to \begin{cases} -۲a+\cancel{b}=۲ \\ ۵a-\cancel{b}=-۴ \end{cases} +$$

$$۳a=-۲ \to \boxed{a=-\frac{۲}{۳}}$$

$$-۲(\frac{-۲}{۳})+b=۲ \to \boxed{b=\frac{۲}{۳}}$$

$$\boxed{\to f_۱(x)=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۲}{۳}}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \; , \; f_۲(x)=ax+b \to \begin{cases} -۲a+b=-۱ \\ a+b=۲ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a-\cancel{b}=۱ \\ a+\cancel{b}=۲ \end{cases} +$$

$$۳a=۳ \to \boxed{a=۱} \; , \; \boxed{b=۱}$$

$$\to \boxed{f_۲(x)=x+۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} \; , \; f_۳(x)=ax+b \to \begin{cases} a+b=-۴ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \to \begin{cases} -a-\cancel{b}=۴ \\ ۳a+\cancel{b}=۰ \end{cases}$$

$$۲a=۴ \to \boxed{a=۲} \; , \; \boxed{b=-۶}$$

$$\to \boxed{f_۳(x)=۲x-۶}$$

$$\to f(x)=\begin{cases} -\frac{۲}{۳}x+\frac{۲}{۳} & , \quad x\leq -۲ \\ x+۱ & , \quad -۲<x\leq ۱ \\ ۲x-۶ & , \quad ۱<x \end{cases}$$

۴

$$f(۰)=۳(۰)^۲-۵(۰)+۱=۰-۰+۱ \to f(۰)=۱$$

$$f(۱)=۳(۱)^۲-۵(۱)+۱=۳-۵+۱ \to f(۱)=-۱$$

$$f(۲)=۳(۲)^۲-۵(۲)+۱=۱۲-۱۰+۱ \to f(۲)=۳$$

$$f(-۱)=۳(-۱)^۲-۵(-۱)+۱=۳+۵+۱ \to f(-۱)=۹$$

$$f(-۳)=۳(-۳)^۲-۵(-۳)+۱=۲۷+۱۵+۱ \to f(-۳)=۴۳$$

۵

$$(۲,a-b)=(۲,۳)\to a-b=۳$$
$$(a,۲b+a)=(a,۲a-۱)\to ۲b+a=۲a-۱$$
$$\to\begin{cases}\cancel{a}-b=۳\\ -\cancel{a}+۲b=-۱\end{cases}\;+$$
$$b=۲\;,\;a-۲=۳\to a=۵$$

۶

الف) $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۱۰-۲x}$

$$\begin{matrix}x-۲\ge ۰ & \to x\ge ۲ & \to x\ge ۲\\ , & , & ,\\ ۱۰-۲x\ge ۰ & \to ۱۰\ge ۲x & \to ۵\ge x\end{matrix}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} ۲\le x\le ۵\Rightarrow D_f=[۲,۵]$$

ب) $g(x)=\dfrac{\sqrt{۹-x}}{\sqrt{x-۱}}$

$$\begin{matrix}۹-x\ge ۰ & \to ۹\ge x\\ , & ,\\ x-۱>۰ & \to x>۱\end{matrix}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} ۱<x\le ۹\to D_g=(۱,۹]$$

پ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{۳x-۶}}{\sqrt{۲x-۶}}$

$$\begin{matrix}۳x-۶\ge ۰ & \to ۳x\ge ۶ & \to x\ge ۲\\ , & , & ,\\ ۲x-۶>۰ & \to ۲x>۶ & \to x>۳\end{matrix}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} x>۳\to D_h=(۳,+\infty)$$

ت) $k(x)=\sqrt{\dfrac{۲x-۱۶}{۲-x}}$

$$\to\frac{۲x-۱۶}{۲-x}\ge ۰\to\begin{matrix}۲x-۱۶=۰\to x=۸\\ ۲-x=۰\to x=۲\end{matrix}\to$$

x	$-\infty$	۲		۸	$+\infty$
۲x−۱۶	−		−	۰	+
۲−x	+	۰	−		−
P	−	ت.ن	+ ج	ج	−

$$۲<x\le ۸\;\to\;D_k=(۲,۸]$$

ث) $y=\sqrt{۴-\sqrt{۱-۲x}}$

$$\begin{cases}۱-۲x\ge ۰\to ۱\ge ۲x\to x\le\dfrac{۱}{۲}\\ ۴-\sqrt{۱-۲x}\ge ۰\to ۴\ge\sqrt{۱-۲x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱۶\ge ۱-۲x\to ۲x\ge -۱۵\to x\ge -\dfrac{۱۵}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}}-\frac{۱۵}{۲}\le x\le\frac{۱}{۲}\to D_y=\left[-\frac{۱۵}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$$

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۱-|x|}{۱+|x|}}\to\dfrac{۱-|x|}{۱+|x|}\ge ۰\xrightarrow{۱+|x|>۰}۱-|x|\ge ۰\to ۱\ge |x|$

$$\to -۱\le x\le ۱\to D_f=[-۱,۱]$$

۷

$$x-۳=۰\to x=۳\to D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

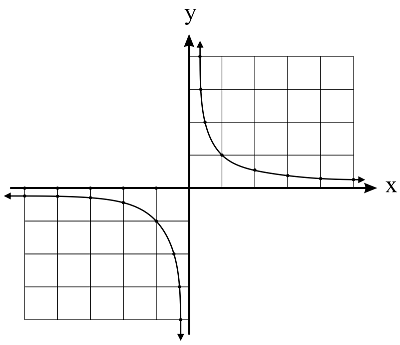
۸

$$f(x)=\frac{۷x}{x+۱}$$

۹

x	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\cdots$
$\frac{۱}{x}$	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	-۳	$\cdots$

x	۵	۴	۳	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\cdots$
$\frac{۱}{x}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳	$\cdots$



۱۰

$$y=\sqrt{x}-۲ \qquad , y=-۳+\sqrt{x-۴} \qquad , y=\sqrt{x+۱}+۳$$

x	۰	۱	۴
y	-۲	-۱	۰

x	۴	۵	۸
y	-۳	-۲	-۱

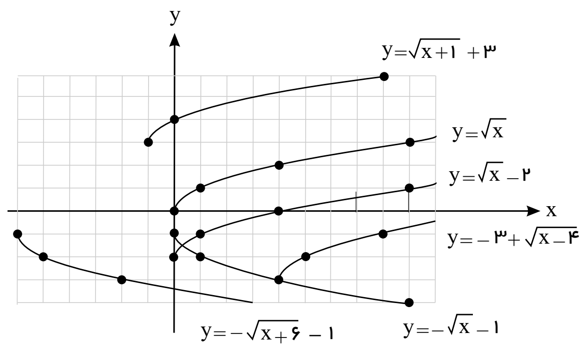
x	-۱	۰	۳
y	۳	۴	۵

$$y=-\sqrt{x}-۱$$

x	۰	۱	۴
y	-۱	-۲	-۳

$$y=-\sqrt{x+۶}-۱$$

x	-۶	-۵	-۲
y	-۱	-۲	-۳



۱۱

الف

$$f(x)=\frac{\sqrt{۵}}{x}\rightarrow x=۰\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

ب

$$f(x)=\frac{x}{x+۵}\rightarrow x+۵=۰\rightarrow x=-۵\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۵\}$$

پ

$$g(x)=\frac{x^۲+۳x+۲}{x-۱}\rightarrow x-۱=۰\rightarrow x=۱\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

ت

$$h(x)=\frac{x-۳}{x^۲+۴}\rightarrow x^۲+۴=۰\rightarrow x^۲=-۴ \text{ ریشه ندارد } \rightarrow D_h=\mathbb{R}$$

ث

$$k(x)=\frac{۴x^۲+۳}{x^۲-۳x-۱۰}\rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰\rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \begin{matrix}\nearrow x=۵\\ \searrow x=-۲\end{matrix}$$

$$\rightarrow D_k=\mathbb{R}-\{-۲,۵\}$$

ج

$$l(x)=\frac{۳}{x^۲+x+۲}\to x^۲+x+۲=۰\to \Delta=۱^۲-۴(۱)(۲)=-۷<۰ \text{ ریشه ندارد}$$

$$\to D_l=\mathbb{R}$$

چ

$$r(x)=\frac{x^۲+۳x+۶}{x^۲-۴x+۴}\to x^۲-۴x+۴=۰\to (x-۲)^۲=۰\to x=۲\to D_r=\mathbb{R}-\{۲\}$$

ح

$$u(x)=\frac{۶x+۱۵}{x^۲+۲x-۱۵}\to x^۲+۲x-۱۵=۰\to (x+۵)(x-۳)=۰ \begin{cases} \nearrow x=-۵ \\ \searrow x=۳ \end{cases}$$

$$\to D_u=\mathbb{R}-\{-۵,۳\}$$

خ

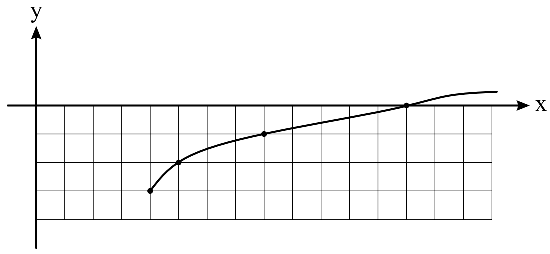
$$f(x)=\frac{۲x^۲+۵}{x^۴-۵x^۲+۴}\to x^۴-۵x^۲+۴=۰\to (x^۲-۱)(x^۲-۴)=۰$$

$$\begin{cases} \nearrow x^۲-۱=۰\to (x-۱)(x+۱)=۰\to x=\pm ۱ \\ \searrow x^۲-۴=۰\to (x-۲)(x+۲)=۰\to x=\pm ۲ \end{cases} \to D_f=\mathbb{R}-\{-۲,-۱,۱,۲\}$$

۱۲

$$g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}\to x-۴\geq ۰\to x\geq ۴\to D_g=[۴,+\infty)$$

x	y
۴	-۳
۵	-۲
۸	-۱
۱۳	۰



۱۳

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۸}\to x^۲-۶x+۸\geq ۰\to (x-۴)(x-۲)=۰ \begin{cases} \nearrow x=۲ \\ \searrow x=۴ \end{cases}$$

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$x^۲-۶x+۸$		+	۰	−	۰	+	
		ج	ج		ج	ج	

$$\to D_f=(-\infty,۲]\cup[۴,+\infty)$$

۱۴

$$P(a,۰)\to ۰=-۳+\sqrt{a+۲}\to ۳=\sqrt{a+۲}\to ۹=a+۲\to \boxed{a=۷}$$

۱۵

$$f(۰)=۳+\sqrt{۲(۰)}=۳+۰\to f(۰)=۳$$

$$f(۱)=۳+\sqrt{۲(۱)}=۳+\sqrt{۲}\to f(۱)=۳+\sqrt{۲}$$

$$f(۲)=۳+\sqrt{۲(۲)}=۳+۲\to f(۲)=۵$$

$$f(۸)=۳+\sqrt{۲(۸)}=۳+۴\to f(۸)=۷$$

۱۶

$$f(۲-\sqrt{۳})=\frac{۲(۲-\sqrt{۳})^۲+۲}{(۲-\sqrt{۳})^۲-۳}=\frac{۲(۴-۴\sqrt{۳}+۳)+۲}{۴-۴\sqrt{۳}+۳-۳}=\frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۴\sqrt{۳}}=\frac{۴(۴-۲\sqrt{۳})}{۴(۱-\sqrt{۳})}$$

$$\rightarrow f(۲-\sqrt{۳})=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۴+۴\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۶}{۱-۳}$$

$$=\frac{-۲+۲\sqrt{۳}}{-۲}=\frac{-۲(۱-\sqrt{۳})}{-۲}\rightarrow \boxed{f(۲-\sqrt{۳})=۱-\sqrt{۳}}$$

۱۷

الف

$$D_f=[-۳,۴]\ ,\ R_f=[-۲,۳]$$

ب

$$D_f=[\circ,۲)\ ,\ R_f=[\circ,۲)$$

پ

$$D_f=[-۳,۲]\cup(۳,+\infty)\ ,\ R_f=[-۲,۲]\cup(۳,+\infty)$$

ت

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=[-۱,۱]$$

۱۸ R

۱۹

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x+۵}\qquad D_f=\mathbb{R}-\{-۵\}$

ب) $g(x)=\dfrac{۳}{x-۴}\qquad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$

۲۰ نمودار f محور xها در نقطه‌ای به طول ۵ قطع کرده است، پس مختصات نقطهٔ $(۵,\circ)$ در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(۵)=\circ\Rightarrow f(۵)=a+\sqrt{۵+b}=\circ\quad(۱)$$

همچنین $f(۱)=-۲$ می‌باشد، پس داریم:

$$f(۱)=a+\sqrt{۱+b}=-۲\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\begin{cases}a+\sqrt{۵+b}=\circ\\ a+\sqrt{۱+b}=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\cancel{a}-\sqrt{۵+b}=\circ\\ \cancel{a}+\sqrt{۱+b}=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۱+b}-\sqrt{۵+b}=-۲\Rightarrow\sqrt{۱+b}+۲=\sqrt{۵+b}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}(۱+\cancel{b})+۴\sqrt{۱+b}+۴=۵+\cancel{b}$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{۱+b}=\circ\Rightarrow ۱+b=\circ\Rightarrow b=-۱$$

$$\xrightarrow{a+\sqrt{۵+b}=\circ} a+\sqrt{۵-۱}=\circ\Rightarrow a+۲=\circ\Rightarrow a=-۲$$

۲۱ برای آنکه دامنهٔ تابع f شامل همه اعداد حقیقی شود، باید معادلهٔ $x^۲+mx+m=\circ$ فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، داریم:

$$x^۲+mx+m=\circ\ ,\ \Delta<\circ\Rightarrow\Delta=m^۲-۴m<\circ$$

برای حل نامعادلهٔ $m^۲-۴m<\circ$، عبارت $P=m^۲-۴m$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$P=\circ\Rightarrow m^۲-۴m=\circ\Rightarrow m(m-۴)=\circ\Rightarrow\begin{cases}m=\circ\\ m=۴\end{cases}$$

m		$\circ$		۴	
$m^۲-۴m$	+	$\circ$	-	$\circ$	+

$$P<\circ\Rightarrow \circ<m<۴$$

۲۲ طبق فرض، $x=-۲$ و $x=۵$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}+ax+b=۰$ می‌باشند. داریم:

مجموع ریشه‌ها $=-a=-۲+۵=۳ \Rightarrow a=-۳$

حاصلضرب ریشه‌ها $=b=-۱۰$

۲۳

الف

$R-\{۰,-۱\}$

یا

$(-\infty,-۱)\cup(-۱,۰)\cup(۰,+\infty)$

۲۴

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases} \quad , \quad g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

$D_f=\mathbb{R}-\{۰\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\rightarrow D_f=D_g$

$g(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}\rightarrow f(x)=g(x)$

ب) $f(x)=x-۲ \quad , \quad g(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}$

$D_f=\mathbb{R} \qquad x+۲=۰\rightarrow x\neq -۲\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$

$\rightarrow D_f\neq D_g\rightarrow$ دو تابع برابر نیستند

۲۵

$f(x)=(\sqrt{x})^{۲}\rightarrow x\geq ۰\rightarrow D_f=[۰,+\infty)$

$g(x)=|x|\rightarrow D_g=\mathbb{R}$

$\rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ دو تابع f و g برابر نیستند

۲۶

$f(x)=\sqrt{x^{۲}}\rightarrow x^{۲}\geq ۰\rightarrow x\in\mathbb{R}\rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$h(x)=|x|\rightarrow D_h=\mathbb{R}\rightarrow D_f=D_h$

$f(x)=\sqrt{x^{۲}}=|x|=h(x)\rightarrow f(x)=h(x)$

دامنه و ضابطه‌های f و h با هم برابرند پس دو تابع با هم برابرند.

۲۷

$f(x)=\dfrac{۳(x^{۲}-۱)}{x-۱}=۳x+۳\rightarrow x-۱\neq ۰\rightarrow x\neq ۱\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$

$g(x)=۳x+۳\rightarrow D_g=\mathbb{R}$

$\rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ دو تابع f و g برابر نیستند

۲۸ الف)

۴	۳	۲	۱	d
۷۱۲	۶۰۵٫۲	۴۹۸٫۴	۳۵۶	$S=۳۵۶\sqrt{d}$

ب) «چون هر عدد، تنها یک ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است.»

پ) عدد ۵، زیرا رادیکال برای عدد منفی تعریف نمی‌شود.

۲۹ با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. پس گزینه‌های (پ) و (ت) را بررسی می‌کنیم. چون تابع از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ می‌گذرد ضابطهٔ

آن به‌صورت $y = \frac{۴}{۲}x = ۲x$ است. پس گزینهٔ (پ) یکی از پاسخ‌هاست. از طرفی با ساده کردن ضابطهٔ تابع گزینهٔ (ت) داریم:

$$g(x) = \frac{۲x^۲ - ۲x}{x - ۱} = \frac{۲x(x-۱)}{x-۱} = ۲x$$

پس گزینهٔ (ت) نیز پاسخ است.

هر تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{۱\}$ که پس از ساده کردن به‌صورت $y = ۲x$ باشد، می‌تواند جواب مسئله باشد. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۳۰ خیر، برابر نیستند، زیرا با محاسبهٔ دامنهٔ دو تابع داریم:

$$\left.\begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

۳۱

الف نادرست

ب نادرست

۳۲

الف اگر $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ باشد، آنگاه دو تابع f و g با هم برابرند.

اولین شرط تساوی دو تابع، مساوی بودن دامنهٔ آنها است. توجه کنید که قبل از ساده کردن باید دامنهٔ تابع را به دست آوریم.

$$D_f = \mathbb{R} - \{۱\}\ ,\ D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

ب اگر $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ باشد، آنگاه دو تابع f و g با هم برابرند.

دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R} - \{-۱\}$ است:

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-۱\}$$

دامنه تابع خطی g برابر $\mathbb{R}$ است. دامنهٔ دو تابع برابر نیستند و در نتیجه دو تابع با هم برابر نمی‌باشند.

پ اگر $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ باشد، آنگاه دو تابع f و g با هم برابرند.

ابتدا $|x|$ را با توجه به تعریف آن، به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{|x|} \overset{x\neq ۰}{=} \begin{cases} \frac{x}{x} = ۱ & x > ۰ \\ \frac{x}{-x} = -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

دامنهٔ دو تابع f و g و همچنین ضابطهٔ آنها یکسان است. بنابراین دو تابع f و g با هم برابرند.

ت اگر $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ باشد، آنگاه دو تابع f و g با هم برابرند.

$$\begin{aligned} & x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-۱\} \quad (۱) \\ & x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ & \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-۱\} \quad (۲) \\ & (۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow D_f = D_g \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$g(x) = \frac{\cancel{x+۱}}{(x+۱)^{\cancel{۲}}} = \frac{۱}{x+۱} = f(x) \Rightarrow g = f$$

۳۳

الف دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای آنکه دو تابع f و g با هم برابر باشند، باید دامنهٔ آنها یکسان باشد:

$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \Rightarrow b = ۲$$

از طرفی باید مقدار دو تابع f و g به‌ازای $x = ۲$ یکی باشد. پس:

$$f(۲) = g(۲)\ ,\ f(۲) = ۲a - ۱\ ,\ g(۲) = ۲ + ۲ = ۴$$

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow ۲a = ۵ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

ب دامنهٔ هر دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس $D_f = D_g$

$$f(x) = \frac{۹x^۲ - ۱}{۳x + ۱} = \frac{(۳x-۱)\cancel{(۳x+۱)}}{\cancel{۳x+۱}} = ۳x - ۱$$

$$= g(x) = ۳x + b \Rightarrow b = -۱$$

از طرفی باید تساوی $f(-\frac{۱}{۳}) = g(-\frac{۱}{۳})$ نیز برقرار باشد:

$$g(x) = ۳x + b \Rightarrow g(-\frac{۱}{۳}) = ۳ \times (-\frac{۱}{۳}) + b = -۱ + b$$

$$\underline{\underline{b = -۱}} - ۲ = f(-\tfrac{۱}{۳}) = a \Rightarrow a = -۲$$

۳۴

الف نادرست

۳۵

الف درست

ب نادرست

۳۶

الف نادرست

۳۷ خیر زیرا دامنهٔ تابع‌ها برابر نیست، $D_f = R - \{-۲\}$ $\quad D_g = R$

۳۸

$$[x+۲] = ۵ \to [x] + ۲ = ۵ \to [x] = ۳ \to \boxed{۳ \le x < ۴}$$

$$-۲[x-۱] = ۶ \to [x-۱] = -\frac{۶}{۲} \to [x] - ۱ = -۳ \to [x] = -۲ \to \boxed{-۲ \le x < -۱}$$

$$[۲x-۳] = ۱ \to [۲x] - ۳ = ۱ \to [۲x] = ۴ \to ۴ \le ۲x < ۵ \to \boxed{۲ \le x < \frac{۵}{۲}}$$

۳۹

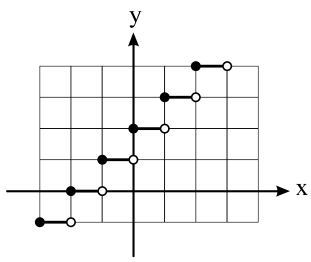
$$[۳۰۰/۴۰۰۲] = ۳۰۰$$

$$[-۱۰۳/۰۰۳] = -۱۰۴$$

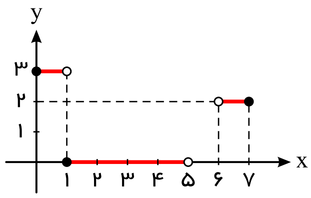
$$[-۲۳۰۹/۵۴] = -۲۳۱۰$$

۴۰

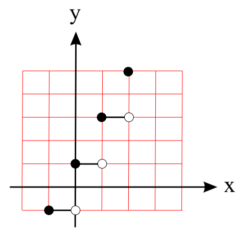
$$\begin{aligned}
&f(x) = [x+۲] = [x] + ۲\\
&-۳ \le x < -۲ \to [x] = -۳ \to f(x) = -۱\\
&-۲ \le x < -۱ \to [x] = -۲ \to f(x) = ۰\\
&-۱ \le x < ۰ \to [x] = -۱ \to f(x) = ۱\\
&۰ \le x < ۱ \to [x] = ۰ \to f(x) = ۲\\
&۱ \le x < ۲ \to [x] = ۱ \to f(x) = ۳\\
&۲ \le x < ۳ \to [x] = ۲ \to f(x) = ۴
\end{aligned}$$



۴۱



۴۲



$$-۱ \le x < ۰ \to [x] = -۱ \to y = -۱$$

$$۰ \le x < ۱ \to [x] = ۰ \to y = ۱$$

$$۱ \le x < ۲ \to [x] = ۱ \to y = ۳$$

$$x = ۲ \to [x] = ۲ \to y = ۵$$

۴۳

$$[\sqrt{۲} + ۳] = [\sqrt{۲}] + ۳ = [۱٫۴۱] + ۳ = ۱ + ۳ = ۴ \qquad (\sqrt{۲} \simeq ۱٫۴۱)$$

$$[۲\sqrt{۳} - ۱] = [۲\sqrt{۳}] - ۱ = [۲ \times ۱٫۷۳] - ۱ = [۳٫۴۶] - ۱ = ۳ - ۱ = ۲ \qquad (\sqrt{۳} \simeq ۱٫۷۳)$$

$$\left[\frac{\pi}{۲} + ۴\right] = \left[\frac{\pi}{۲}\right] + ۴ = \left[\frac{۳٫۱۴}{۲}\right] + ۴ = [۱٫۵۷] + ۴ = ۱ + ۴ = ۵ \qquad (\pi \simeq ۳٫۱۴)$$

$$\left[-\frac{۴۹}{۱۶}\right] = \left[\frac{-۴۸ - ۱}{۱۶}\right] = \left[-۳ - \frac{۱}{۱۶}\right] = \left[-۳\frac{۱}{۱۶}\right] = -۴$$

$$[۱٫۵ + \sqrt{۲}] = [۱٫۵ + ۱٫۴۱] = [۲٫۹۱] = ۲ \qquad (\sqrt{۲} \simeq ۱٫۴۱)$$

$$[-\sqrt{۷} - ۲] = [-\sqrt{۷}] - ۲ = [-۲٫۶۴] - ۲ = -۳ - ۲ = -۵ \qquad (\sqrt{۷} \simeq ۲٫۶۴)$$

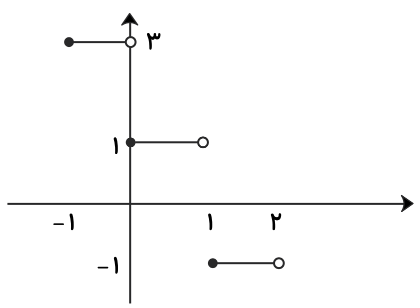
$$\left[-\frac{\pi}{۳}\right] = \left[-\frac{۳٫۱۴}{۳}\right] = [-۱٫۰۴] = -۲$$

۴۴

$$|[۷x] - |[۵x]|| = \left|[۷ \times (\frac{-۱}{۲})] - \left|[۵ \times (-\frac{۱}{۲})]\right|\right| = \left|[-\frac{۷}{۲}] - \left|[-\frac{۵}{۲}]\right|\right| = |[-۳٫۵] - |[-۲٫۵]||$$

$$= |-۴ - |-۳|| = |-۴ - ۳| = |-۷| = ۷$$

۴۵



۴۶

$$\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] = ۱ \qquad \left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] = -۱$$

۴۷

$$[-۳٫۴] = -۴ \qquad [-۲] = -۲ \qquad [-۱٫۹] = -۲ \qquad [۰٫۴] = ۰ \qquad [-۰٫۴] = -۱$$

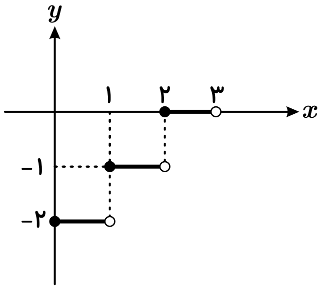
$$[۴٫۲۵] = ۴ \qquad [۳] = ۳ \qquad [۲٫۳] = ۲ \qquad [۱٫۷] = ۱ \qquad [۱٫۲] = ۱$$

۴۸

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = [x] - ۲ = -۲$$

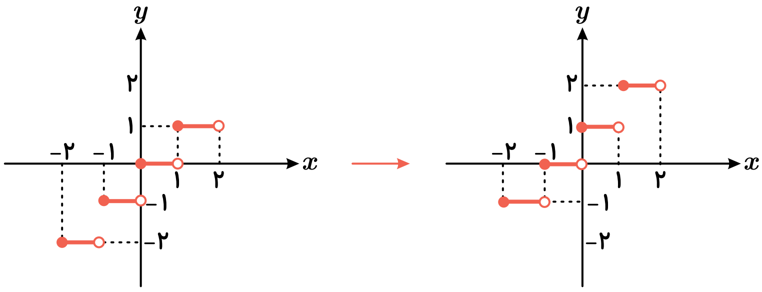
$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = [x] - ۲ = ۱ - ۲ = -۱$$

$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = [x] - ۲ = ۲ - ۲ = ۰$$



۴۹

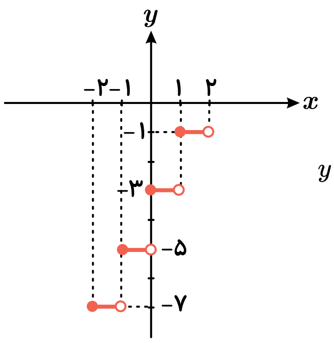
الف با انتقال به اندازهٔ یک واحد نمودار $y=[x]$ به سمت بالا، نمودار $y=[x]+1$ رسم می‌شود:



ب با توجه به تعریف جزء صحیح، تابع را به‌صورت یک تابع پله‌ای می‌نویسیم. اگر n یک عدد صحیح و $n \le x < n+1$، آنگاه $[x]=n$، بنابراین داریم:

$$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=2[x]-3=2(-2)-3=-7$$
$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=2[x]-3=2(-1)-3=-5$$
$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=2[x]-3=2(0)-3=-3$$
$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=2[x]-3=2(1)-3=-1$$

ضابطهٔ تابع و نمودار تابع به‌صورت زیر است:



$$y=\begin{cases} -1 & 1 \le x < 2 \\ -3 & 0 \le x < 1 \\ -5 & -1 \le x < 0 \\ -7 & -2 \le x < -1 \end{cases}$$

پ با در نظر گرفتن بازه‌های مختلف و با حذف $[x]$، ضابطهٔ تابع را به دست می‌آوریم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=x+[x]=x$$

باید خط $y=x$ را در محدودهٔ $0 \le x < 1$ رسم کنیم:

x	0	1
y	0	1

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=x+[x]=x+1$$

باید خط $y=x+1$ را در محدودهٔ $1 \le x < 2$ رسم کنیم:

x	1	2
y	2	3

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=x+[x]=x-1$$

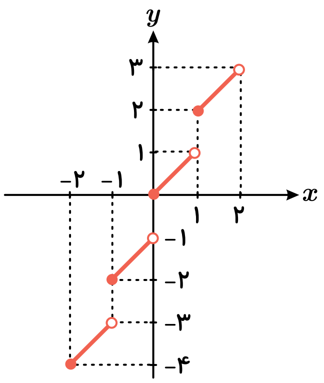
باید خط $y=x-1$ را در محدودهٔ $-1 \le x < 0$ رسم کنیم:

x	-1	0
y	-2	-1

$$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=x+[x]=x-2$$

همچنین خط $y=x-2$ در محدودهٔ

$-2 \le x < -1$ باید رسم شود:



x	-2	-1
y	-4	-3

ت) ابتدا با استفاده از تعریف جزء صحیح و در نظر گرفتن محدودهٔ مناسب، مقدار $[x]$ را به دست می‌آوریم و ضابطهٔ تابع را بدون $[x]$ می‌نویسیم و سپس نمودار تابع به‌دست‌آمده را در همان محدوده رسم می‌کنیم:

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - [x] = x - 1 \Rightarrow$

x	1	2
y	0	1

$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x - [x] = x - 0 = x \Rightarrow$

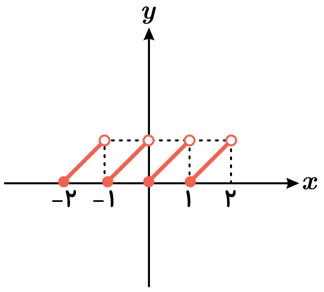
x	0	1
y	0	1

$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - [x] = x + 1 \Rightarrow$

x	-1	0
y	0	1

$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - [x] = x + 2 \Rightarrow$

x	-2	-1
y	0	1



۵۰

الف) اگر $[x] = n$ و n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $n \le x < n + 1$

$[x] = 3 \Rightarrow 3 \le x < 3 + 1 \Rightarrow x \in [3, 4)$

ب) اگر $[x] = n$ و n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $n \le x < n + 1$

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] = -1 \Rightarrow -1 \le \frac{x+1}{2} < -1 + 1 \Rightarrow -1 \le \frac{x+1}{2} < 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 \le x + 1 < 0 \xrightarrow{-1} -3 \le x < -1 \Rightarrow x \in [-3, -1)$$

پ) اگر $[x] = n$ و n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $n \le x < n + 1$

$$[2x - 1] = 5 \Rightarrow 5 \le 2x - 1 < 5 + 1 \xrightarrow{+1} 6 \le 2x < 7$$

$$\xrightarrow{\div 2} 3 \le x < \frac{7}{2} \Rightarrow x \in [3, \frac{7}{2})$$

ت) اگر $[x] = n$ و n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $n \le x < n + 1$

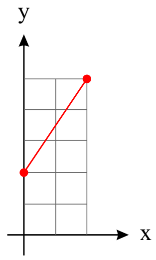
$$2[x] + 5 = 0 \Rightarrow [x] = -\frac{5}{2}$$

چون $-\frac{5}{2}$ عدد صحیح نیست، پس معادلهٔ $[x] = -\frac{5}{2}$ جواب ندارد.

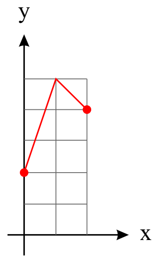
۵۱ گزینهٔ «د»

۵۲

الف)



ب)



۵۳

تابع f یک به یک وارون‌پذیر است و داریم: $f=\{(۱,۴),(۲,۷),(۶,۹),(۵,۱۲)\} \rightarrow$

$f^{-۱}=\{(۴,۱),(۷,۲),(۹,۶),(۱۲,۵)\}$

$g=\{(۲,۳),(۴,۹),(۷,-۱),(۵,۹)\}$

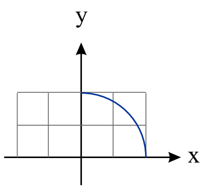
تابع g یک به یک نیست زیرا به‌ازای $y=۹$ دو مقدار $x=۴$ و $x=۵$ داریم. بنابراین تابع g وارون‌پذیر نیست.

۵۴

تابع f یک به یک $\rightarrow (۳,۵)=(a+۱,۵) \rightarrow a+۱=۳ \rightarrow \boxed{a=۲}$

$\rightarrow f=\{(۳,۵),(۴,-۶),(۴,۳b)\} \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} (۴,-۶)=(۴,۳b) \rightarrow ۳b=-۶ \rightarrow \boxed{b=-۲}$

۵۵



۵۶

حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند.

۵۷

تابع f یک به یک $\rightarrow (m,۳)=(-۱,۳) \rightarrow m=-۱$

$\rightarrow f=\{(-۲,۲),(-۱,۳),(-۲,a)\} \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} (-۲,۲)=(-۲,a) \rightarrow a=۲$

۵۸

شرط یک به یک بودن زوج مرتب این است که مؤلفه‌ی دوم برابر نداشته باشد و در صورت برابری مؤلفه‌ی دوم باید مؤلفه‌ی اول هم برابر باشند.

$(۲,b+۱),(۲,a+۳) \Rightarrow$ چون تابع است $\Rightarrow b+۱=a+۳ \Rightarrow b=a+۲$

$(۱,۴),(b^۲-۳,۴) \Rightarrow$ چون یک به یک است $\Rightarrow b^۲-۳=۱ \Rightarrow b=\pm ۲$

$$b=a+۲ \Rightarrow \begin{cases} b=۲ \Rightarrow & a=۰ \\ b=-۲ \Rightarrow & a=-۴ \end{cases}$$

۵۹

الف) درست

۶۰

الف) نادرست

۶۱ نمودار تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ یک‌به‌یک است، زیرا هر خط افقی نمودار تابع را در این بازه در یک نقطه قطع می‌کند.

☒ $[۰,۲]$ ☐ $[۱,۴)$

۶۲ الف) زیرا با رسم خط $y=۲$ نمودار تابع در دو نقطه با طول‌های $x=۱$ و $x=۳$ قطع می‌شود. یعنی دو نقطه $(۱,۲)$ و $(۳,۲)$ دارای عرض یکسان

هستند.

ب) با حذف نقطهٔ $(۱,۲)$ یا نقطهٔ $(۳,۲)$ می‌توان تابع را به تابعی یک‌به‌یک تبدیل کرد.

پ) مسئله دو جواب دارد.

۶۳

$$(۱,a+۲b),(۱,۴)\in f \xrightarrow{f\text{ تابع است.}} a+۲b=۴ \qquad (۱)$$

$$(-۲,۳),(۲a-b,۳)\in f \xrightarrow{\text{تابع یک‌به‌یک است.}} ۲a-b=-۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \begin{array}{r} \\ ۲\times \end{array}\begin{cases} a+۲b=۴ \\ ۲a-b=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\cancel{۲b}=۴ \\ ۴a-\cancel{۲b}=-۴ \end{cases} \Rightarrow ۵a=۰$$

$$\Rightarrow a=۰ \xrightarrow{(۱)} ۰+۲b=۴ \Rightarrow b=۲$$

۶۴

الف

$$f\times g=\{(۲,-۳),(۳,۱),(۱,۰)\}$$
$$\frac{g}{f}=\{(۲,-۳),(۳,۱)\}$$

ب خیر، در دو زوج مرتب مؤلفهٔ دوم تکراری می‌باشند و مؤلفه‌های اول یکسان نیستند.

۶۵ د

۶۶

$$f(۱)=۵\to(۱,۵)\in f\ ,\ \ (۵,۱)\in f^{-۱}$$

$$f^{-۱}(۹)=۳\to(۹,۳)\in f^{-۱}\ ,\ (۳,۹)\in f$$

$$\xrightarrow{f}(۱,۵),(۳,۹)\to a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۹-۵}{۳-۱}=\frac{۴}{۲}=۲\to y=ax+b$$

$$\to y=۲x+b\xrightarrow{(۱,۵)}۵=۲(۱)+b\to b=۳\to y=۲x+۳$$
$$\to\boxed{f(x)=۲x+۳}$$

$$\to y=۲x+۳\to ۲x=y-۳\to x=\frac{y-۳}{۲}\to x=\frac{y}{۲}-\frac{۳}{۲}$$

$$\to f^{-۱}(y)=\frac{y}{۲}-\frac{۳}{۲}\to\boxed{f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲}}$$

۶۷

الف)

$$(۳,۱)\in f\to(۱,۳)\in f^{-۱}\to f^{-۱}(۱)=۳$$

$$(۴,-۱)\in f\to(-۱,۴)\in f^{-۱}\to f^{-۱}(-۱)=۴$$

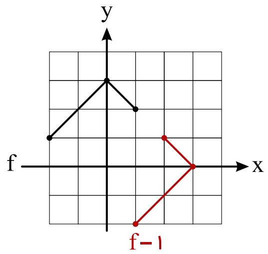
$$\to f^{-۱}(۱)+f^{-۱}(-۱)۳+۴=۷$$

ب)

$$(۱,۴)\in f\to(۴,۱)\in f^{-۱}\to f^{-۱}(۴)=۱\ ,\ \ (۲,۳)\in f\to(۳,۲)\in f^{-۱}\to f^{-۱}(۳)=۲$$

$$\to ۲f^{-۱}(۴)+۳f^{-۱}(۳)=۲(۱)+۳(۲)=۲+۶=۸$$

۶۸



$$(-2,1)\in f \to (1,-2)\in f^{-1}$$
$$(0,3)\in f \to (3,0)\in f^{-1}$$
$$(1,2)\in f \to (2,1)\in f^{-1}$$

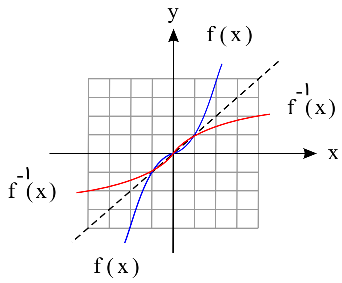
۶۹

$$y=2x+3 \to y-3=2x \to x=\frac{y-3}{2} \to f^{-1}(y)=\frac{y}{2}-\frac{3}{2} \to \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}$$

۷۰

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \quad \to \quad f(x)=x\,|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ رسم می‌کنیم که همان $f^{-1}(x)$ است.



۷۱

$$y=(x+1)^3-4 \to y+4=(x+1)^3 \to \sqrt[3]{y+4}=x+1 \to x=\sqrt[3]{y+4}-1$$

$$\to f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y+4}-1 \to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+4}-1 \to \begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+4}-1 \end{cases}$$

۷۲ تابع درجه دوم یک به یک و وارون‌پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع نیمی از سهمی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون‌پذیر است.

$$y=(x-2)^2 \to \sqrt{y}=x-2 \to x=\sqrt{y}+2 \to f^{-1}(y)=\sqrt{y}+2$$

$$\to f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2 \to \begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}^{\geq 0}\to\mathbb{R}^{\geq 2} \\ f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2 \end{cases}$$

۷۳

$$f(x)=\frac{1-2x}{5} \to y=\frac{1-2x}{5} \to 5y=1-2x \to 2x=1-5y$$

$$\to x=\frac{1-5y}{2} \to f^{-1}(y)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}y \to \boxed{f^{-1}(x)=-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}}$$

$$g(x)=-3x+1 \to y=-3x+1 \to 3x=1-y \to x=\frac{1-y}{3}$$

$$\to g^{-1}(y)=\frac{1}{3}-\frac{y}{3} \to \boxed{g^{-1}(x)=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}$$

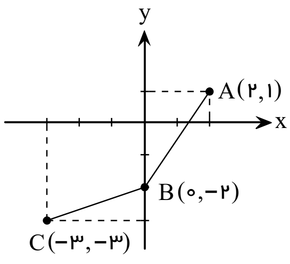
$$3y+4x+12=0 \to 4x=-3y-12 \to x=\frac{-3y-12}{4} \to x=-\frac{3y}{4}-3$$

$$\to \boxed{y^{-1}=-\frac{3x}{4}-3}$$

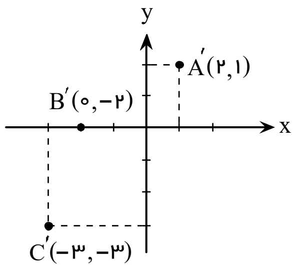
۷۴

الف نمودار «الف» یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

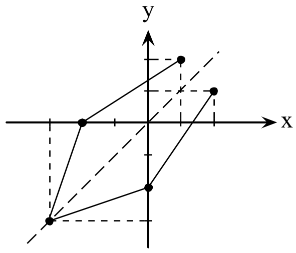
برای رسم نمودار تابع وارون نمودار(الف)، بهتر است نقاط (x, y) مشخص از نمودار را پیدا کرده، سپس نقاط (y, x) را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را به هم وصل می کنیم.



یافتن نقاط مشخص (x, y)



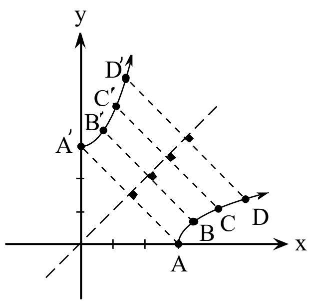
یافتن نقاط مشخص (y, x)



وصل کردن نقاط

ب نمودار قسمت «ب» مربوط به تابعی یک‌به‌یک نیست، زیرا خط $y = ۲$ نمودار را در بی‌نهایت نقطه قطع می‌کند، پس وارون‌پذیر نیست.

پ در این قسمت، نقاط به تعداد کافی نداریم، بنابراین باید نقاطی از نمودار را مشخص کرده، از آن‌ها بر خط $y = x$ عمود کنیم و به همان اندازه ادامه دهیم تا نقاط نمودار $f^{-۱}$ به دست آید. در نهایت باید نقاط به‌دست آمده را به هم وصل کنیم.



بنابراین بسته به این که مختصات نقاط تابع مشخص ات یا خیر، برای رسم وارون تابع، یکی از روش‌های فوق را استفاده می‌کنیم.

۷۵

الف) $f(x) = ۵x - ۲ \to y = ۵x - ۲ \to y + ۲ = ۵x \to x = \dfrac{y+۲}{۵}$

$\to f^{-۱}(y) = \dfrac{y+۲}{۵} \to f^{-۱}(x) = \dfrac{x+۲}{۵}$

ب) $f(x) = \dfrac{۳}{۵}x + ۴ \to y = \dfrac{۳}{۵}x + ۴ \to y - ۴ = \dfrac{۳}{۵}x \to x = \dfrac{۵(y-۴)}{۳}$

$\to f^{-۱}(y) = \dfrac{۵(y-۴)}{۳} \to f^{-۱}(x) = \dfrac{۵(x-۴)}{۳}$

پ) $f(x) = \dfrac{-۷x+۳}{۵} \to y = \dfrac{-۷x+۳}{۵} \to ۵y = -۷x + ۳$

$\to ۷x = -۵y + ۳ \to x = \dfrac{-۵y+۳}{۷} \to f^{-۱}(y) = \dfrac{-۵y+۳}{۷} \to f^{-۱}(x) = \dfrac{-۵x+۳}{۷}$

۷۶

$f^{-۱} = \{(۳,۲), (۱,-۲), (۲,-۱)\}$

۷۷

$f^{-۱}(۴) = a \to (۴, a) \in f^{-۱} \to (a, ۴) \in f \to -a + \sqrt{-۲a} = ۴$

$\to \sqrt{-۲a} = ۴ + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} -۲a = a^۲ + ۸a + ۱۶ \to a^۲ + ۱۰a + ۱۶ = ۰$

$$a+۲=۰ \rightarrow \boxed{a=-۲} \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-۲(-۲)}=۴-۲ \quad \checkmark$$

$$\rightarrow (a+۸)(a+۲)=۰$$

$$a+۸=۰ \rightarrow a=-۸ \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-۲(-۸)}=۴-۸ \quad \times$$

۷۸

$$(-۳,۲)\in f^{-۱} \rightarrow (۲,-۳)\in f$$
$$(۹,-۱)\in f^{-۱} \rightarrow (-۱,۹)\in f \rightarrow a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۳-۹}{۲-(-۱)}=\frac{-۱۲}{۳}\rightarrow a=-۴$$

$$\rightarrow y=-۴x+b \xrightarrow{(۲,-۳)} -۳=-۴(۲)+b \rightarrow b=۵ \rightarrow \boxed{f(x)=-۴x+۵}$$

۷۹

$$f(-۲)=۵ \rightarrow (-۲,۵)\in f \rightarrow (۵,-۲)\in f^{-۱}$$

$$\rightarrow ۴a-۷=۵ \rightarrow ۴a=۱۲ \rightarrow \boxed{a=۳}$$

۸۰ روش اول:

$$(۲,-۲)\,,\,(-۱,۴) \rightarrow a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-(-۲)}{-۱-۲}=\frac{۶}{-۳}=-۲$$

$$\rightarrow y=-۲x+b \xrightarrow{(۲,-۲)} -۲=-۲(۲)+b \rightarrow b=۲ \rightarrow \boxed{f(x)=-۲x+۲}$$

$$\rightarrow y=-۲x+۲ \rightarrow ۲x=-y+۲ \rightarrow x=\frac{-y+۲}{۲} \rightarrow f^{-۱}(y)=-\frac{y}{۲}+۱$$

$$\rightarrow \boxed{f^{-۱}(x)=-\frac{x}{۲}+۱}$$

روش دوم:

$$(۲,-۲),(-۱,۴)\in f \rightarrow (-۲,۲),(۴,-۱)\in f^{-۱}$$

$$\rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-(-۱)}{-۲-۴}=\frac{۳}{-۶}=-\frac{۱}{۲} \rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+b$$

$$\xrightarrow{(-۲,۲)} ۲=-\frac{۱}{۲}(-۲)+b \rightarrow ۲=۱+b \rightarrow b=۱ \rightarrow \boxed{f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱}$$

۸۱ روش اول: تابع f از نقطه‌های $(۲,۰)$ و $(۰,-۱)$ می‌گذرد، ابتدا ضابطهٔ تابع f را بدست آورده و از روی آن ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(۲,۰),(۰,-۱) \rightarrow a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۰-(-۱)}{۲-۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$y=ax+b \rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+b \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱=\frac{۱}{۲}(۰)+b \rightarrow b=-۱$$

$$\rightarrow \boxed{f(x)=\frac{۱}{۲}x-۱} \rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۱ \rightarrow y+۱=\frac{۱}{۲}x \rightarrow x=۲y+۲$$

$$\rightarrow f^{-۱}(y)=۲y+۲ \rightarrow \boxed{f^{-۱}(x)=۲x+۲}$$

روش دوم: $f \ni (۰,-۱),(۲,۰)$ در نتیجه داریم $(-۱,۰),(۰,۲)\in f^{-۱}$ و می‌توانیم ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را بصورت مستقیم از روی نقاط $(-۱,۰)\,,\,(۰,۲)$ بدست آوریم:

$$(-۱,۰)\,,\,(۰,۲) \rightarrow a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-۰}{۰-(-۱)}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$,\; y=ax+b \rightarrow y=۲x+b \xrightarrow{(۰,۲)} ۲=۲(۰)+b \rightarrow b=۲$$

$$\rightarrow y=۲x+۲ \rightarrow \boxed{f^{-۱}(x)=۲x+۲}$$

۸۲

$$(۵,\frac{۵}{۳})\epsilon f \Rightarrow ۵=\frac{۵}{۳}a+۴ \Rightarrow a=\frac{۳}{۵}$$

$$y=\frac{۳}{۵}x+۴ \Rightarrow y-۴=\frac{۳}{۵}x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۳}(x-۴)$$

۸۳

$$y=\frac{۲x-۱}{۳} \Rightarrow ۳y=۲x-۱ \Rightarrow ۳y+۱=۲x \Rightarrow x=\frac{۳y+۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳x+۱}{۲}$$

۸۴

$$f^{-۱}(-۳)=۱ \Rightarrow f(۱)=-۳ \Rightarrow -۳=-۱+m \Rightarrow m=-۲$$

$$y=-x-۲ \Rightarrow x=-y-۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=-x-۲$$

۸۵

$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$	$s^{-۱}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$
$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$	$t^{-۱}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$
$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$	$u^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$

۸۶ ج

۸۷ تابع درجه دوم یک به یک و وارون‌پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع نیمی از سهمی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون‌پذیر است.

$$y=x^۲+۴x+۳ \rightarrow y=x^۲+۴x+۴-۱ \rightarrow y=(x+۲)^۲-۱$$

$$\rightarrow y+۱=(x+۲)^۲ \rightarrow \sqrt{y+۱}=x+۲ \rightarrow x=\sqrt{y+۱}-۲$$

$$\rightarrow f^{-۱}(y)=\sqrt{y+۱}-۲ \rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲ \rightarrow \begin{cases} f^{-۱}:\mathbb{R}^{\geq -۱} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -۲} \\ f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲ \end{cases}$$

۸۸

الف نیمساز ربع اول و سوم (یا خط $y=x$)

۸۹

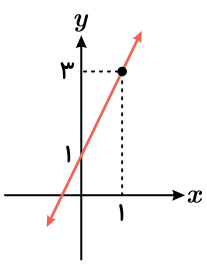
الف

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}$$

۹۰

الف نمودار تابع خطی با مشخص کردن دو نقطه روی آن قابل رسم است:

x	۰	۱
y	۱	۳



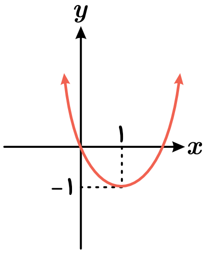
هر خط به موازات محور xها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، پس $y=۲x+۱$ ضابطهٔ یک تابع یک‌به‌یک است.

ب با مشخص کردن رأس سهمی و دو نقطهٔ کمکی، نمودار را رسم می‌کنیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$\Rightarrow S(1,-1)$

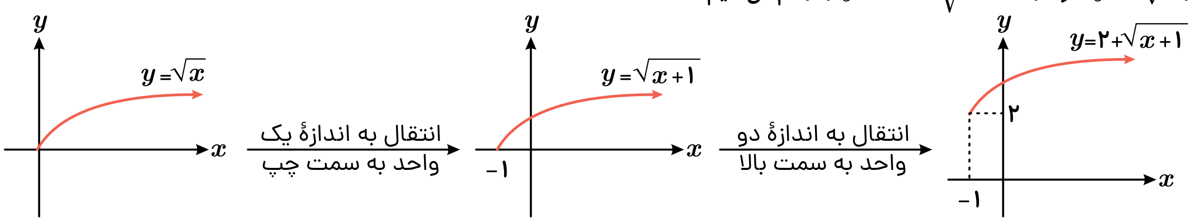
x	0	1	2
y	0	-1	0



نمودار تابع، محور xها را در دو نقطه قطع کرده است، پس f تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

اگر ضابطهٔ f را در محدودهٔ $(-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ و یا در هر زیربازه از آنها در نظر بگیریم، آنگاه f در این محدوده تابعی یک‌به‌یک است.

پ با انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ نمودار $y = 2 + \sqrt{x+1}$ را رسم می‌کنیم:



هر خط به موازات محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس نمودار یک تابع یک‌به‌یک است.

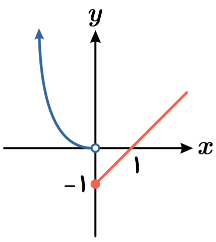
ت f یک تابع دوضابطه‌ای است. نمودار f از خط $y = x - 1$ در بازهٔ $[0, +\infty)$ و سهمی $y = x^2$ در بازهٔ $(-\infty, 0)$ تشکیل شده است.

$y = x - 1$,

x	0	1
y	-1	0

$y = x^2$,

x	-1	0
y	1	0



با توجه به نمودار، خط $y = 1$، نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس f تابع یک‌به‌یک نیست.

اگر ضابطهٔ f را در محدودهٔ $(-\infty, 0]$ یا $[0, +\infty)$ در نظر بگیریم، آنگاه در این محدوده f تابعی یک‌به‌یک است.

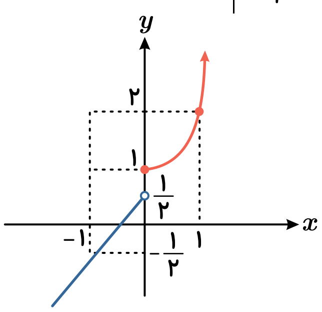
ث

$y = x^2 + 1$,

x	0	1
y	1	2

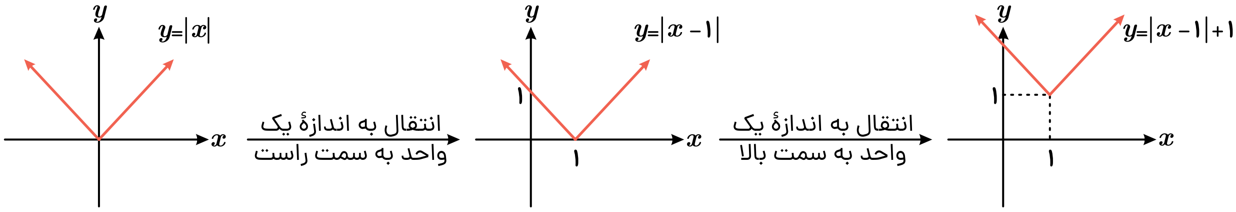
$y = x + \frac{1}{2}$,

x	-1	0
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



با توجه به نمودار، هر خط به موازات محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک تابع یک‌به‌یک است.

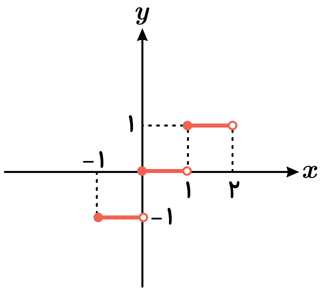
ج نمودار تابع f را با استفاده از نمودار $y = |x|$ و به کمک انتقال رسم می‌کنیم:



خط $y=۲$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس f تابعی غیر یک‌به‌یک است.

اگر ضابطهٔ f را در محدودهٔ $(-\infty,۱]$ یا $[۱,+\infty)$ در نظر بگیریم، آنگاه f در این محدوده تابعی یک‌به‌یک است.

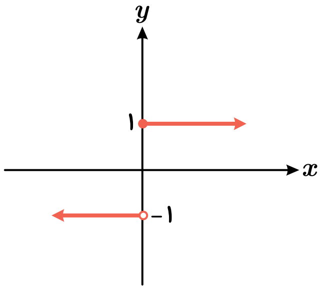
چ نمودار تابع $y=[x]$ به‌صورت روبه‌رو است:



با توجه به نمودار، خط $y=۱$، نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، پس $y=[x]$ تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

هیچ بازه‌ای نمی‌توان مشخص کرد که تابع در آن بازه یک‌به‌یک باشد.

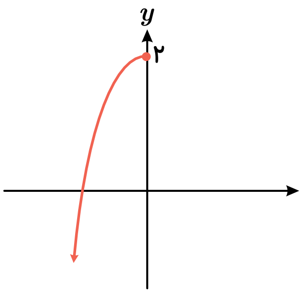
ح نمودار تابع پله‌ای f به‌صورت روبه‌رو است:



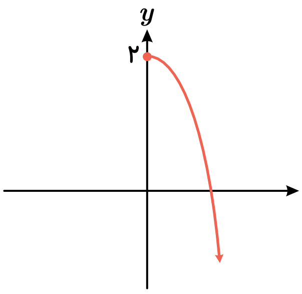
خط‌های $y=-۱$ و $y=۱$، نمودار تابع f را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند، پس تابع پله‌ای f یک تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد. تابع f روی هیچ بازه‌ای تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۹۱

الف هر یک از نمودارهای

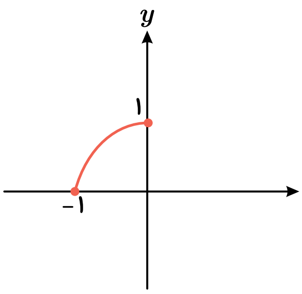


و

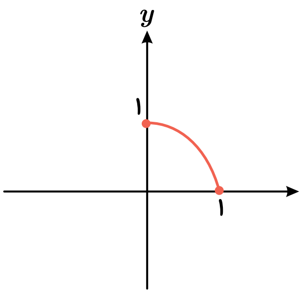


نمودار یک تابع یک‌به‌یک هستند.

ب هر یک از نمودارهای



و



نمودار یک تابع یک‌به‌یک هستند.

۹۲ زیرا هر خط موازی با محور xها نمودار آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

الف

$$y = x + ۵ \Rightarrow y - ۵ = x \Rightarrow f^{-۱}(x) = x - ۵$$

ب

$$y = ۴x \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}y \Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}x$$

پ

$$y = ۲x + ۳ \Rightarrow y - ۳ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y - ۳}{۲} \Rightarrow u^{-۱}(x) = \frac{x - ۳}{۲}$$

ت

$$y = \frac{۲}{۳}x - ۴ \Rightarrow y + ۴ = \frac{۲}{۳}x \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}(y + ۴) \Rightarrow v^{-۱}(x) = \frac{۳}{۲}(x + ۴)$$

۹۳

$$g^{-۱}(x) = x + ۲ \to g^{-۱}(۳) = ۵, f(-۳) = -۵$$
$$g^{-۱}(۳) + f(-۳) = ۰$$

۹۴

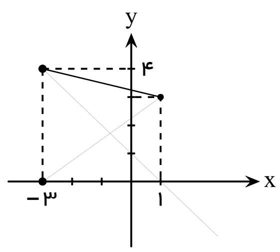
$$۳x + ۵ = ۸ \to x = ۱ \to (۱, ۸) \in f \to f^{-۱}(۸) = ۱$$

۹۵ مطابق نمودار می‌توان نوشت:

$$f = \{(-۳, ۰), (۱, ۳)\}, g = \{(-۳, ۴), (۱, ۰)\} \to \begin{cases} (f+g)(-۳) = f(-۳) + g(-۳) = ۰ + ۴ = ۴ \\ (f+g)(۱) = f(۱) + g(۱) = ۳ + ۰ = ۳ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_f = [-۳, ۱] \\ D_g = [-۳, +\infty) \end{array}\right\} \to D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۳, ۱]$$

پس نمودار $f + g$ بدون ضابطه و با استفاده از نقاط به‌دست آمده به این صورت است:



۹۶

$$f(۰) = ۰ - ۱ = -۱ \to \boxed{x = -۱}$$

$$f(-۱) = -۱ - ۱ \to f(-۱) = -۲ \quad , \quad g(-۱) = -۱$$

$$\to (f + ۲g)(-۱) = f(-۱) + ۲g(-۱) = -۲ + ۲(-۱) \to \boxed{(f + ۲g)(-۱) = -۴}$$

۹۷

الف

$$(f - g)(۰) = f(۰) - g(۰) = ۳ - (-۳) = ۶$$

ب

$$(\frac{f}{g})(-۱) = \frac{f(-۱)}{g(-۱)} = \frac{۳}{-۲} = -\frac{۳}{۲}$$

۹۸

الف

$$f(۱) = ۲, g(۱) = ۰$$
$$(f + g)(۱) = f(۱) + g(۱) = ۲ + ۰ = ۲$$

ب

$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}, g\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$

$(f \times g)\left(\frac{۱}{۲}\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) \times g\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

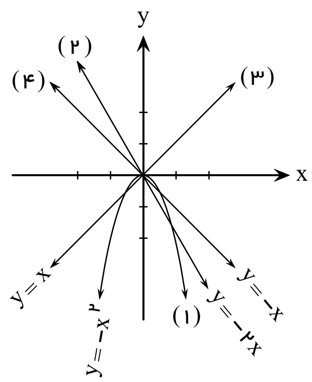
۹۹

$f(x) = x \quad , \quad g(x) = -x \quad , \quad h(x) = -۲x$

$\rightarrow -x = x + (-۲x) \rightarrow g(x) = f(x) + h(x)$

$g(x) = (f + h)(x)$

۱۰۰



الف

$y_{(۴)} - y_{(۳)} = -x - x = -۲x = y_{(۲)}$

$y_{(۴)} - y_{(۲)} = -x - (۲x) = x = y_{(۳)}$

ب

$y_{(۳)} \cdot y_{(۴)} = x(-x) = -x^{۲} = y_{(۱)}$

۱۰۱

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ ۲x - ۲ & x > ۲ \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ۴ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ -۲x + ۸ & x > ۲ \end{cases}$$

عمل‌های مربوط را باید در دامنهٔ مشترک توابع انجام دهیم.

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} ۴ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ ۶ & x > ۲ \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ -۴x^{۲} + ۲۰x - ۱۶ & x > ۲ \end{cases}$$

در عمل تقسیم $\frac{f}{g}$، ریشه‌های مخرج $g(x) = ۰$ را باید از دامنهٔ مشترک حذف کنیم.

$g(x) = ۰ \rightarrow -۲x + ۸ = ۰ \rightarrow x = ۴ \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{۴\}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ \frac{x-۱}{۴-x} & x > ۲ - \{۴\} \end{cases}$$

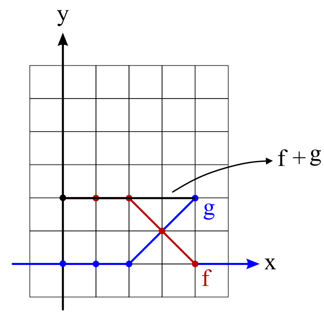
توجه داریم که عمل $\frac{g(x)}{f(x)}$ را به ازای $x=۴$ نمی‌توانیم انجام دهیم.

۱۰۲

$$f=\{(۰,۲),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۰)\}$$

$$g=\{(۰,۰),(۱,۰),(۲,۰),(۳,۱),(۴,۲)\}$$

$$\to f+g=\{(۰,۲),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲)\}$$



۱۰۳

$$f(-۲)=\left|(-۲)^۲-۵\right|=|۴-۵|=۱\quad,\quad g(۲)=\frac{۲}{۱+۲^۲}=\frac{۲}{۵}$$

$$\to\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}=\frac{۱+۱}{\frac{۲}{۵}}=\frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{۲}{۵}}\to\boxed{\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}=۵}$$

۱۰۴

$$(۰,۴)\,,(۲,۰)\in f\to a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-۰}{۰-۲}=-۲$$

$$\to y=-۲x+b\xrightarrow{(۰,۴)}۴=-۲(۰)+b\to b=۴\to\boxed{f(x)=-۲x+۴}$$

$$(۰,-۱),(۳,۰)\in g\to a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۰-(-۱)}{۳-۰}=\frac{۱}{۳}\to y=\frac{۱}{۳}x+b\xrightarrow{(۰,-۱)}-۱=\frac{۱}{۳}(۰)+b$$

$$\to b=-۱\;\to\boxed{g(x)=\frac{x}{۳}-۱}$$

الف) $f(x)=-۲x+۴\to D_f=\mathbb{R}\;,\quad g(x)=\frac{x}{۳}-۱\to D_g=\mathbb{R}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-۲x+۴+\frac{x}{۳}-۱\to\boxed{(f+g)(x)=\frac{-۵x}{۳}+۳}$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\to\boxed{D_{f+g}=\mathbb{R}}$$

ب) $f(۶)=-۲(۶)+۴\to f(۶)=-۸\;,\quad g(۶)=\frac{۶}{۳}-۱\to g(۶)=۱$

$$\to(۳g-f)(۶)=۳g(۶)-f(۶)=۳(۱)-(-۸)\to\boxed{(۳g-f)(۶)=۱۱}$$

۱۰۵

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۴}\to x-۴\neq۰\to x\neq۴\to D_f=\mathbb{R}-\{۴\}$$

$$g(x)=\sqrt{x-۲}\to x-۲\geq۰\to x\geq۲\to D_g=[۲,+\infty)$$

$\to D_f\cap D_g=[۲,+\infty)-\{۴\}$ یا $D_f\cap D_g=[۲,۴)\cap(۴,+\infty)$

الف) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+۱}{x-۴}}{\sqrt{x-۲}}\to\boxed{(\frac{f}{g})(x)=\frac{(x+۱)}{(x-۴)\sqrt{x-۲}}}$

$$\left.\begin{array}{l} D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|\, g(x) = ۰\} \\ g(x) = ۰ \to \sqrt{x-۲} = ۰ \to x = ۲ \end{array}\right\} \to D_{\frac{f}{g}} = ([۲,۴) \cup (۴,+\infty)) - \{۲\}$$

$$\to \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (۲,۴) \cup (۴,+\infty)}$$

ب) $(\frac{g}{f})(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-۲}}{\frac{x+۱}{x-۴}} \to \boxed{(\frac{g}{f})(x) = \frac{(\sqrt{x-۲})(x-۴)}{(x+۱)}}$

$$f(x) = ۰ \to \frac{x+۱}{x-۴} = ۰ \to x = -۱ \to D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \,|\, f(x) = ۰\}$$

$$\to D_{\frac{g}{f}} = ([۲,۴) \cup (۴,+\infty)) - \{۱\} \to \boxed{D_{\frac{g}{f}} = [۲,۴) \cup (۴,+\infty)}$$

پ) $f(۶) = \frac{۶+۱}{۶-۴} = \frac{۷}{۲} \quad , \quad g(۶) = \sqrt{۶-۲} = ۲$

$$\to (۴f-۳g)(۶) = ۴f(۶) - ۳g(۶) = ۴(\frac{۷}{۲}) - ۳(۲) = ۱۴ - ۶$$

$$\to \boxed{(۴f-۳g)(۶) = ۸}$$

۱۰۶

$$D_f = \{-۱,۰,۱,۳,۴\} \quad , \quad D_g = \{-۲,۰,۱,۳,۵\}$$

$$\to D_f \cap D_g = \{۰,۱,۳\}$$

$$\to ۲g - f = \{۰,۲(۳)-۵),(۱,۲(-۲)-۲),(۳,۲(۲)-۱۰)\}$$

$$\to ۲g - f = \{(۰,۱),(۱,-۶),(۳,-۶)\}$$

$$(\frac{f}{g})(۳) = \frac{f(۳)}{g(۳)} = \frac{۱۰}{۲} \to \boxed{(\frac{f}{g})(۳) = ۵}$$

۱۰۷

$$(۰,۱)\,,\,(-۱,۰) \in f \to a = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{۰-۱}{-۱-۰} = ۱$$

$$\to y = x + b \xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = ۰ + b \to b = ۱ \to \boxed{f(x) = x+۱}$$

$$(۰,۲)\,,\,(۲,۰) \in g \to a = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{۲-۰}{۰-۲} = -۱$$

$$\to y = -x + b \xrightarrow{(۰,۲)} ۲ = -(۰) + b \to b = ۲ \to \boxed{g(x) = -x+۲}$$

$$f(۳) = ۳+۱ = ۴\,,\quad g(۳) = -۳+۲ = -۱$$

$$\to (f+۲g)(۳) = f(۳) + ۲g(۳) = ۴ + ۲(-۱) = ۴ - ۲ \to \boxed{(f+۲g)(۳) = ۲}$$

۱۰۸

$$f(x) = \sqrt{۲-x} \to ۲ - x \geq ۰ \to ۲ \geq x \to D_f = (-\infty,۲]$$

$$g(x) = -۳x + ۳ \to D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = ۰ \to -۳x + ۳ = ۰ \to ۳ = ۳x \to x = ۱$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|g(x) = ۰\} = ((-\infty, , ۲] \cap \mathbb{R}) - \{۱\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (-\infty, ۲] - \{۱\} = (-\infty, ۱) \cup (۱, ۲]}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{۲ - x}}{-۳x + ۳} \rightarrow \boxed{(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{۲ - x}}{-۳x + ۳}}$$

$$f(۰) = \sqrt{۲ - ۰} = \sqrt{۲}\ ,\quad g(۰) = -۳(۰) + ۳ = ۳$$

$$\rightarrow (۲f - g)(۰) = ۲f(۰) - g(۰) = ۲\sqrt{۲} - ۳ \rightarrow \boxed{(۲f - g)(۰) = ۲\sqrt{۲} - ۳}$$

۱۰۹

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + ۳}} \rightarrow x + ۳ > ۰ \rightarrow x > -۳ \rightarrow D_f = (-۳, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x - ۱}{\sqrt{x + ۳}} \rightarrow x + ۳ > ۰ \rightarrow x > -۳ \rightarrow D_g = (-۳, +\infty)$$

$$g(x) = ۰ \rightarrow \frac{x - ۱}{\sqrt{x + ۳}} = ۰ \rightarrow x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|g(x) = ۰\} = (-۳, +\infty) - \{۱\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (-۳, +\infty) - \{۱\} = (-۳, ۱) \cup (۱, +\infty)}$$

۱۱۰

$$f(x) = \sqrt{x - ۱} \rightarrow x - ۱ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۱ \rightarrow D_f = [۱, +\infty)$$

$$g(x) = x^۲ - ۴ \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|g(x) = ۰\} = ([۱, +\infty) \cap \mathbb{R}) - \left\{x|x^۲ - ۴ = ۰\right\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [۱, +\infty) - \{-۲, ۲\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = [۱, ۲) \cup (۲, +\infty)}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x - ۱}}{x^۲ - ۴} \rightarrow \boxed{(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x - ۱}}{x^۲ - ۴}}$$

$$g(۵) = ۵^۲ - ۴ \rightarrow g(۵) = ۲۱$$

$$f(۵) = \sqrt{۵ - ۱} \rightarrow f(۵) = ۲$$

$$(g - ۳f)(۵) = g(۵) - ۳f(۵) = ۲۱ - ۳(۲) \rightarrow \boxed{(g - ۳f)(۵) = ۱۵}$$

۱۱۱

$$D_f = \{۱, ۲, ۳, ۴\}\ ,\ D_g = \{-۱, ۰, ۲, ۳\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{۲, ۳\}$$

$$\rightarrow f + g = \{(۲, ۷ + ۴), (۳, ۵ + ۱)\} \rightarrow f + g = \{(۲, ۱۱), (۳, ۶)\}\ ,\ D_{f+g} = \{۲, ۳\}$$

$$\rightarrow f - g = \{(۲, ۷ - ۴), (۳, ۵ - ۱)\} \rightarrow f - g = \{(۲, ۳), (۳, ۴)\}\ ,\ D_{f-g} = \{۲, ۳\}$$

۱۱۲

$$f(x) = \sqrt{x + ۱} \rightarrow f(۳) = \sqrt{۳ + ۱} \rightarrow f(۳) = ۲$$

$$g(x)=\frac{x+۱}{x-۲}\to g(۳)=\frac{۳+۱}{۳-۲}\to g(۳)=۴$$

$$\to(۲f-g)(۳)=۲f(۳)-g(۳)=۲(۲)-۴\to\boxed{(۲f-g)(۳)=۰}$$

۱۱۳

الف

$$f(x)=|x|\quad,\quad g(x)=\frac{۱}{x}\quad \begin{array}{l}D_f=\mathbb{R}\\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\end{array}\to D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x|+\frac{۱}{x}\quad,\quad D_{f+g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=|x|-\frac{۱}{x}\quad,\quad D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=|x|\times\frac{۱}{x}=\frac{|x|}{x}\quad,\quad D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{|x|}{\frac{۱}{x}}=x|x|\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۰\}-\{x|g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

ب

$$\begin{array}{l}f(x)=x^۲-۴\to D_f=\mathbb{R}\\ g(x)=x+۲\to D_g=\mathbb{R}\end{array}\to D_f\cap D_g=\mathbb{R}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲-۴+x+۲\to(f+g)(x)=x^۲+x-۲\quad,\quad D_{f+g}=\mathbb{R}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲-۴-(x+۲)\to(f-g)(x)=x^۲-x-۶\quad,\quad D_{f-g}=\mathbb{R}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^۲-۴)(x+۲)\to(f\cdot g)(x)=x^۳+۲x^۲-۴x-۸\quad,\quad D_{f\cdot g}=\mathbb{R}$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۴}{x+۲}\to(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

پ

$$\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{x}\to D_f=[۰,+\infty)\\ g(x)=-\sqrt{x}\to D_g=[۰,+\infty)\end{array}\to D_f\cap D_g=[۰,+\infty)$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+(-\sqrt{x})=۰\to(f+g)(x)=۰\quad,\quad D_{f+g}=[۰,+\infty)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-(-\sqrt{x})=۲\sqrt{x}\to(f-g)(x)=۲\sqrt{x}\quad,\quad D_{f-g}=[۰,+\infty)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}\times(-\sqrt{x})=-x\to(f\cdot g)(x)=-x\quad,\quad D_{f\cdot g}=[۰,+\infty)$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-۱\to(\frac{f}{g})(x)=-۱\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=(۰,+\infty)$$

ت

$$\begin{array}{l}f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}\to D_f=\mathbb{R}-\{-۵\}\\ g(x)=x^۲+۳x-۱۰\to D_g=\mathbb{R}\end{array}\to D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-۵\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-۲}{x+۵}+x^۲+۳x-۱۰\quad,\quad D_{f+g}=\mathbb{R}-\{-۵\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x-۲}{x+۵}-(x^۲+۳x-۱۰)\quad,\quad D_{f-g}=\mathbb{R}-\{-۵\}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{x-۲}{x+۵}(x^۲+۳x-۱۰)\quad,\quad D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{-۵\}$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x-۲}{x+۵}}{x^۲+۳x-۱۰}\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۵\}-\{x|g(x)=۰\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۵\}-\{۲,-۵\}\rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۲,-۵\}$$

ث

$$\begin{matrix} g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}\rightarrow D_g=\{-۱,۰,۲,۳\} \\ f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}\rightarrow D_f=\{۲,۳,۰\} \end{matrix}\rightarrow D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$$

$$f+g=\{(۰,-۲+۳)(۲,۵+۴)(۳,۴+۰)\}\rightarrow f+g=\{(۰,۱)(۲,۹)(۳,۴)\}$$

$$f-g=\{(۰,-۲-۳)(۲,۵-۴)(۳,۴-۰)\}\rightarrow f-g=\{(۰,-۵)(۲,۱)(۳,۴)\}$$

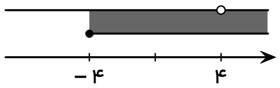
$$f\cdot g=\{(۰,-۲\times ۳)(۲,۵\times ۴)(۳,۴\times ۰)\}\rightarrow f\cdot g=\{(۰,-۶)(۲,۲۰)(۳,۰)\}$$

$$\frac{f}{g}=\left\{(۰,\frac{-۲}{۳})(۲,\frac{۵}{۴})(۳,\frac{۴}{۰})\right\}\rightarrow \frac{f}{g}=\left\{(۰,-\frac{۲}{۳})(۲,\frac{۵}{۴})\right\}$$

۱۱۴

الف

$$\begin{cases} D_f=[-۴,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R}-\{۴\} \end{cases}\rightarrow D_f\cap D_g=[-۴,+\infty)-\{-۴\}\quad (۱)$$



$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}\quad (۲)$$

$$g(x)=۰\rightarrow \frac{x+۲}{x-۴}=۰\rightarrow x=-۲\quad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳):D_{\frac{f}{g}}=[-۴,+\infty)-\{-۲,۴\}$$

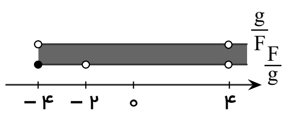
ب

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}\quad (۲)'$$

$$f(x)=۰\rightarrow \sqrt{x+۴}=۰\rightarrow x=-۴\quad (۳)'$$

$$(۱),(۲)',(۳)':D_{\frac{g}{f}}=(-۴,+\infty)-\{۴\}$$

پ در این حالت هر یک از توابع $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ خود حکم دو تابع هستند و دامنهٔ جمع آن‌ها، همان دامنهٔ اشتراک آن ها است.



$$D_{\frac{f}{g}+\frac{g}{f}}=D_{\frac{f}{g}}\cap D_{\frac{g}{f}}=(-۴,+\infty)-\{-۲,۴\}$$

ت

$$(۲f-g)(۵)=۲f(۵)-g(۵)=۲\sqrt{۵+۴}-\frac{۵+۲}{۵-۴}=۲\times ۳-۷=-۱$$

۱۱۵

$D_f=\mathbb{R} \quad D_f=\mathbb{R}-\{۳\} \quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۳,-\frac{۴}{۵}\}$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+۱}{\frac{۵x+۴}{x-۳}}=\frac{(x+۱)(x-۳)}{۵x+۴}$$

۱۱۶

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)=x+\sqrt{x}$	$x\geq ۰$ یا $[۰,+\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x)=\sqrt{x}-x+۲$	$x\geq ۰$ یا $[۰,+\infty)$
$v\cdot v$	$(u\cdot v)(x)=x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-۱$	$x\geq ۰$ یا $[۰,+\infty)$
$\frac{u}{v}$	$(\frac{u}{v})(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}$	$[۰,+\infty)-\{۱\}$

۱۱۷

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=x^۲+۴x-۲$	$\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=x^۲+۲x+۴$	$\mathbb{R}$
$f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=x^۳-۸x-۳$	$\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^۲+۳x+۱}{x-۳}$	$\mathbb{R}-\{۳\}$

۱۱۸

الف

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=R-\{۲\}$ دامنه $\quad D_g=R \quad D_f=R-\{۲\}$

ب

$g(۳)\times ۲f(۴)=۵\times ۲(۲)=۲۰$

۱۱۹

الف

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=[-۵,۵]-\{-۱,۴\}$

ب

$(f-۲g)_{(۰)}=f(۰)-۲g(۰)=۳-۲(۱)=۱$

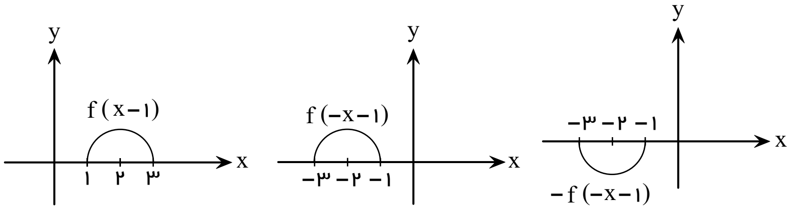
۱۲۰

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+۲}{x-۱}}{x^۲-۴}=\frac{x+۲}{(x-۱)(x^۲-۴)}=\frac{۱}{(x-۱)(x-۲)}$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=(R-\{۱\})\cap R-\{۲,-۲\}=R-\{۱,۲,-۲\}$$

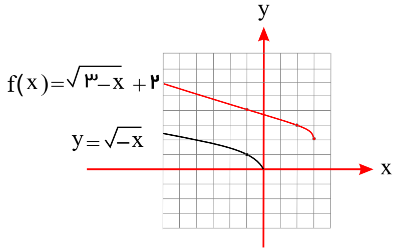
۱۲۱ ابتدا نمودار سهمی $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۱$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم که شکل آن به صورت $y=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۱$ تبدیل می‌شود و سپس آن را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم که شکل آن بصورت $y=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۱+۱$ تبدیل می‌شود و داریم:

$\boxed{y=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۲}$ یا $y=-\frac{۱}{۲}(x^۲+۴x+۴)+۲=-\frac{x^۲}{۲}-۲x-۲+۲\rightarrow \boxed{y=-\frac{x^۲}{۲}-۲x}$

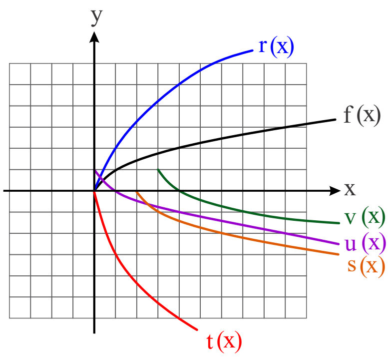
۱۲۲ گزینهٔ «۱»



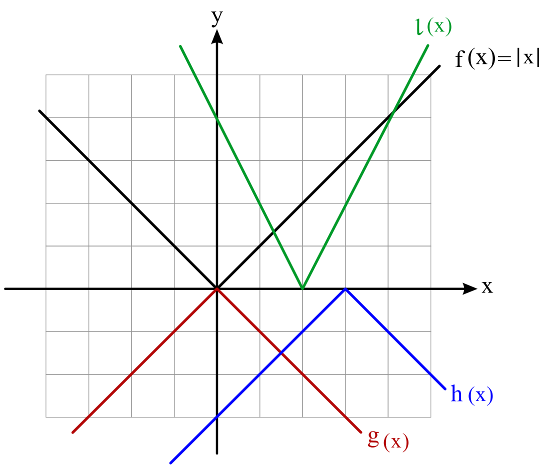
۱۲۳ $f(x)=\sqrt{-(x-۳)}+۲$ پس ابتدا باید نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را رسم کنیم و آن را ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



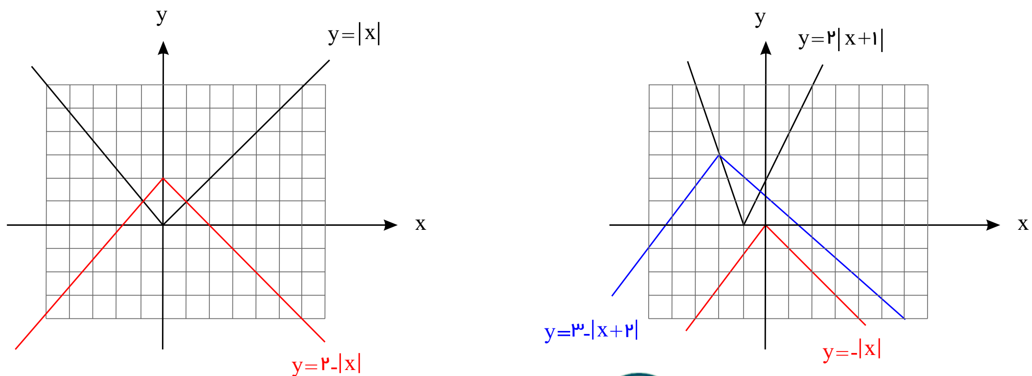
۱۲۴



۱۲۵



۱۲۶



۱۲۷

$$y = x^{۲} + ۴x = x^{۲} + ۴x + ۴ - ۴ \to y = (x + ۲)^{۲} - ۴$$

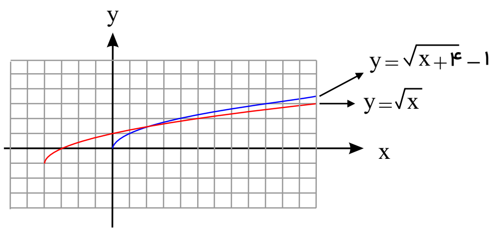
ابتدا نمودار سهمی $y = (x + ۲)^{۲} - ۴$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y = (x + ۲ - ۳)^{۲} - ۴ \to y = (x - ۱)^{۲} - ۴$$

آنگاه نمودار جدید را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y = (x - ۱)^{۲} - ۴ - ۱ \to \boxed{y = (x - ۱)^{۲} - ۵} \text{ یا } \boxed{y = x^{۲} - ۲x - ۴}$$

۱۲۸ ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم و این نمودار را ۴ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین می‌بریم و داریم:



$$y = \sqrt{x} \to \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۹ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\to D_y = [-۴, +\infty) \;,\; R_y = [-۱, +\infty) \qquad y = \sqrt{x + ۴} - ۱ \to \begin{bmatrix} -۴ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

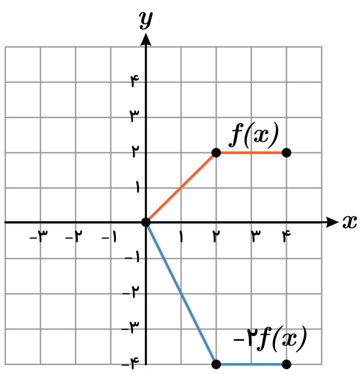
۱۲۹

برای این کار باید در تابع f بدون تغییر طول نقاط، عرض آنها را در -۲ ضرب کنیم، پس داریم:

$(۰, ۰) \to (۰, ۰)$

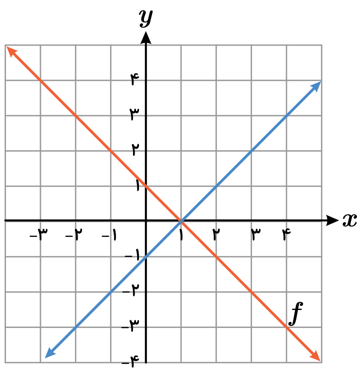
$(۲, ۲) \to (۲, -۴)$

$(۴, ۲) \to (۴, -۴)$



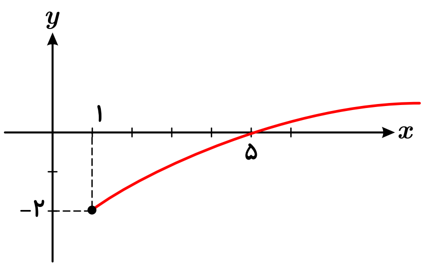
۱۳۰ xها

۱۳۱



۱۳۲

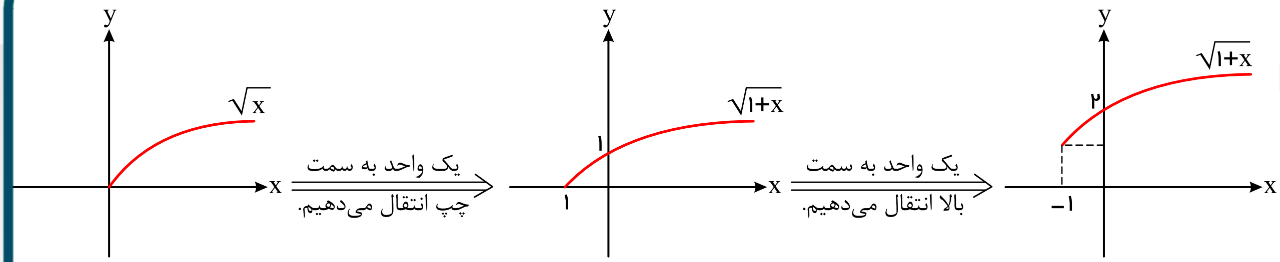
دامنه تابع $[۱, +\infty)$



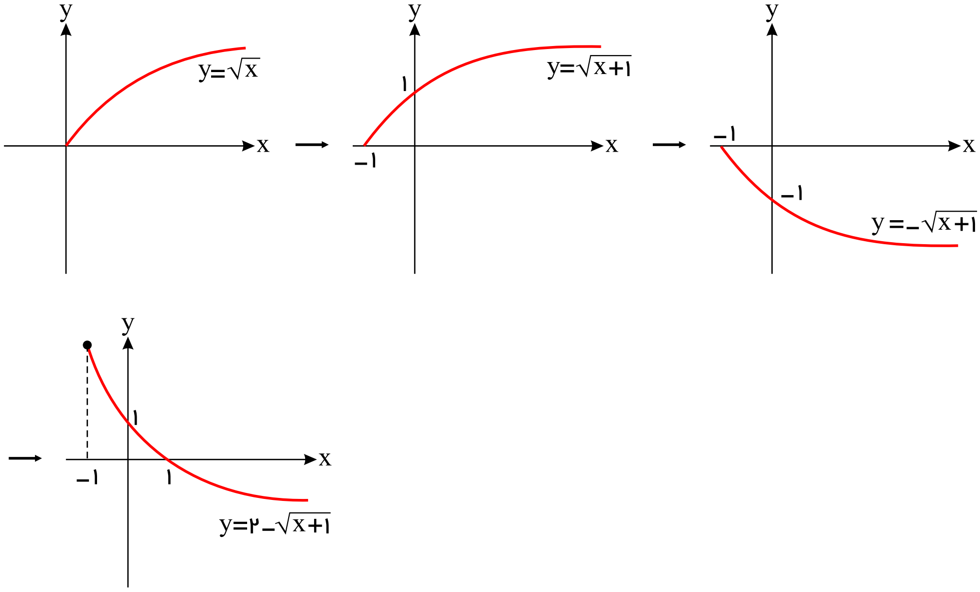
۱۳۳

دامنه

تابع $[-۱, +\infty)$



۱۳۴



$D_f = [-۱, +\infty)$

۱۳۵

$D_f = [۳, +\infty) \qquad R_f = (-\infty, ۱]$