

فصل چهارم : مثلثات

-
- ۱ درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه
 - ۱ یادآوری از مثلثات سال دهم
 - ۲ واحد های اندازه گیری زاویه و محاسبه ی طول کمان
 - ۴ درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی
 - ۴ فرمول های مقدماتی مثلثات
 - ۵ محاسبه ی نسبت های مثلثاتی زوایای ترکیبی
 - ۱۰ درس سوم : توابع مثلثاتی
 - ۱۰ رسم توابع مثلثاتی و دوره ی تناوب

فصل چهارم : مثلثات

درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه یادآوری از مثلثات سال دهم

۱) اگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول وتر BC برابر $\sqrt{20}$ و $\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ باشد، طول اضلاع AB و AC و سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه B را بدست آورید.

۲) معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(\sqrt{3}, -2)$ گذشته و با جهت مثبت محور x زاویه‌ی 60° می‌سازد.

۳) اگر در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) $\hat{B} = 30^\circ$ و $AC = 3$ باشد، طول ضلع‌های AB و BC را بدست آورید.

۴) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\sin 60^\circ \times \sin 45^\circ - \cos 60^\circ \times \cos 45^\circ$

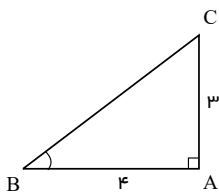
ب) $\frac{\cos 30^\circ - \sin 60^\circ}{\tan 60^\circ + \cot 30^\circ}$

پ) $2 \sin 45^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ$

ت) $\tan 30^\circ \times \cot 60^\circ - \tan 60^\circ \times \cot 30^\circ$

ث) $4 \sin 30^\circ \times \tan 45^\circ + 2 \cos 30^\circ \times \cot 45^\circ$

۵) در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه B را بدست آورید.



۶) اگر $\cot \theta = -\frac{1}{3}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بدست آورید.

۷) اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه θ در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را بدست آورید.

الف) $\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cot \theta > 0 \end{cases}$

۸) در هر یک از حالت‌های زیر حدود زاویه θ را مشخص کنید.

ب) $\begin{cases} \cos \theta < 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases}$

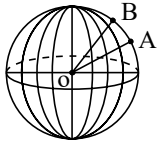
پ) $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases}$

۹) اگر $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه θ در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را بدست آورید.

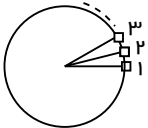
- ۱۰ اگر در یک مثلث طول دو ضلع ۳ و ۴ و زاویه‌ی بین دو ضلع 45° باشد، مساحت مثلث را بدست آورید.
- ۱۱ اگر در یک مثلث $AB = 4$ و $AC = 5$ و $\hat{A} = 60^\circ$ باشد مساحت مثلث ABC را بدست آورید.
- ۱۲ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.
- الف) حداکثر مقدار تابع $f(x) = \cos x$ برابر با است که در نقاط به طول حاصل می‌شود.

واحد های اندازه گیری زاویه و محاسبه ی طول کمان

- ۱۳ مجموع دو زاویه 135° و تفاضل آنها $\frac{\pi}{12}$ رادیان است. هر دو زاویه را برحسب درجه و رادیان بدست آورید.
- ۱۴ مجموع اندازه‌ی سه زاویه $\frac{5\pi}{4}$ رادیان و زاویه‌ها با عددهای ۲ و ۳ و ۴ متناسب هستند. زاویه‌ها را برحسب درجه و رادیان بدست آورید.
- ۱۵ چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت $\frac{7\pi}{12}$ رادیان دوران کند؟
- ۱۶ کمان 9° رادیان در کدام ناحیه دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟
- ۱۷ با توجه به شکل زیر، دو شهر A و B دارای طول جغرافیایی یکسان هستند. اگر عرض جغرافیایی شهر A برابر 39° و عرض جغرافیایی شهر B برابر 44° باشد، فاصله دو شهر را به دست آورید. ($\pi = 3$ شعاع زمین و 6400 km)



- ۱۸ فرض کنید سوار چرخ و فلکی با 80 کابین شده‌اید. اگر در ابتدا در کابین شماره 5 قرار داشته باشید، پس از $\frac{84\pi}{20}$ رادیان دوران، در موقعیت کدام کابین قرار خواهید داشت؟



- ۱۹ در فاصله ساعت 10 تا $3:30$: 10 عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار چه زاویه‌ای برحسب رادیان طی می‌کنند؟
- ۲۰ دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول 8 سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟
- ۲۱ زاویه D برحسب درجه برابر با $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟
- ۲۲ هریک از زاویه‌های $\frac{\pi}{18}$ رادیان، $-\frac{2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان و $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

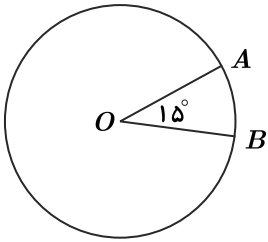
- ۲۳ هریک از زاویه‌های 12° ، -36° ، 72° ، 105° و 315° را به رادیان تبدیل کنید.
- ۲۴ اگر طول کمان دایره‌ای به زاویه مرکزی $\frac{5\pi}{12}$ رادیان برابر $\frac{25\pi}{6}$ باشد، قطر دایره را بدست آورید.
- ۲۵ چرخ و فلکی دارای 30 کابین است و ما، در کابین شماره 8 قرار داریم. اگر به اندازه $\frac{32\pi}{5}$ رادیان و در جهت مثلثاتی بچرخیم، در موقعیت چه کابینی قرار می‌گیریم؟

- ۲۶ اگر در دایره‌ای به شعاع 3 متر، کمانی به طول 7.85 متر روبرو به زاویه مرکزی α باشد، اندازه زاویه α چند درجه و چند رادیان است؟

- ۲۷ اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{5}$ رادیان و $\frac{2\pi}{5}$ رادیان باشد، نوع مثلث را مشخص کنید.

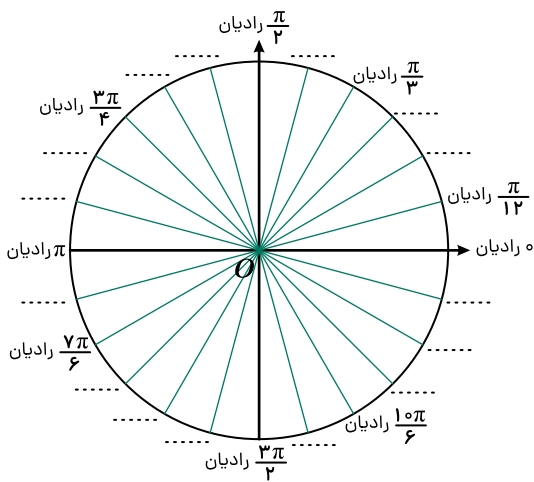
- ۲۸ در دایره‌ای به شعاع 5 متر طول کمان روبرو به زاویه 120° چند متر است؟

۳۹ دایره‌ای مطابق شکل، روی مسیر دایره‌ای از نقطه A به نقطه B می‌رسد. اگر شعاع دایره برابر ۹ متر باشد آنگاه طول کمان AB چند متر است؟
($\widehat{AOB} = 15^\circ$)



۳۰ دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی برابر ۴۵ درجه می‌باشد. طول این کمان چند سانتی متر است؟
۳۱ دوچرخه‌سواری روی یک پیست دایره‌ای شکل به شعاع ۱۰ متر، به اندازه زاویه 120° دوران کرده است. مسافت طی شده توسط این دوچرخه‌سوار چند متر است؟

۳۲ در شکل زیر در هر یک از جاهای خالی زاویه مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



۳۳ جدول زیر را کامل کنید:

D (درجه)	5°	24°	120°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{4}$

۳۴ هر یک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید:

$30^\circ \rightarrow$ $36^\circ \rightarrow$ $45^\circ \rightarrow$
 $60^\circ \rightarrow$ $90^\circ \rightarrow$ $180^\circ \rightarrow$

۳۵ اگر در یک چهارضلعی، سه زاویه بصورت $\frac{7\pi}{12}$ رادیان، $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{5\pi}{6}$ رادیان باشند، زاویه‌ی چهارم این چهارضلعی چند رادیان و چند درجه است؟

۳۶ دایره‌ای به شعاع 6cm مفروض است. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول 10cm چند رادیان و چند درجه است؟

۳۷ ۴ رادیان معادل چند درجه است؟

۳۸ اگر اندازه‌ی دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ رادیان باشد، زاویه‌ی سوم این مثلث چند رادیان و چند درجه است؟

۳۹ درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک‌تر از اندازه هریک از ساق‌های آن است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با 3.14 سانتی‌متر است.

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

ت زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

۴۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف طول کمان روبه‌رو به زاویه 210° درجه در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با است.

۴۱ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف مکمل زاویه 25° برابر می‌باشد.

۴۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

۴۳ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف انتهای کمان زاویهٔ ۶ رادیان در ربع دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

فرمول‌های مقدماتی مثلثات

۴۴ اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ باشد، رابطه‌ای بین x و y بدست آورید.

۴۵ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$

ب) $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{3} - \cot^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12}}$

پ) $\frac{\cot \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{6}}$

ت) $(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6})(3 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6})$

ث) $\frac{\sin^2(\frac{\pi}{3}) + \tan^2(\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\frac{\pi}{4}) + \tan^2(\frac{\pi}{6})} - 3 \sin^2 \frac{7\pi}{15} - 3 \cos^2 \frac{7\pi}{15}$

۴۶ اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای زاویه‌ی θ در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ را بدست آورید.

۴۷ اگر $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم باشد، آنگاه $\tan \theta$ چقدر است؟

۴۸ اگر $\tan x = -\frac{1}{2}$ و $\cos x < 0$ باشد، مقدار $\sin x$ را به دست آورید.

۴۹ اگر $\tan \theta = 4$ باشد، مقدار $\frac{3 \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ را بدست آورید.

۵۰ اگر $\tan \theta = -2$ و $\sin \theta < 0$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بدست آورید.

۵۱ اگر $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ و $\cos \alpha < 0$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را بدست آورید.

۵۲ جدول زیر را کامل کنید.

نسبت \ زاویه α	۰ رادیان = ۰°	$\frac{\pi}{6}$ رادیان = ۳۰°	$\frac{\pi}{4}$ رادیان = ۴۵°	$\frac{\pi}{3}$ رادیان = ۶۰°	$\frac{\pi}{2}$ رادیان = ۹۰°	π رادیان = ۱۸۰°	$\frac{3\pi}{4}$ رادیان = ۱۳۵°	$\frac{3\pi}{2}$ رادیان = ۲۷۰°
$\sin \alpha$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$			-1	0
$\cos \alpha$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$			-1		
$\tan \alpha$					تعریف نشده		تعریف نشده	
$\cot \alpha$			1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$				

۵۳ اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و $\sin x > 0$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه x را بیابید.

۵۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} =$$

ب

$$\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{6}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ =$$

محاسبه ی نسبت های مثلثاتی زوایای ترکیبی

۵۵ اگر $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 0.8$ باشد حاصل عبارت $\sin(\frac{5\pi}{4} - \alpha) + \cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) + 3 \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را بدست آورید.

۵۶ اگر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(7\pi + \alpha) + \cos(\alpha - \frac{7\pi}{2})} = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.

۵۷ مقدار عبارت $\sin(\frac{-179\pi}{6}) + \cos(\frac{-179\pi}{6})$ را بدست آورید.

۵۸ معادله زیر به ازای چه مقداری از k برقرار است؟

$$(\sqrt{3}k \tan \frac{\pi}{6})^2 + 32(\frac{k}{3} \sin \frac{\pi}{6} \times \cos^2 \frac{\pi}{6}) + 3(\tan^2 \frac{\pi}{3} \times \cot^2 \frac{\pi}{3}) = 0$$

۵۹ اگر $\frac{\sin(\frac{11\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(5\pi - \alpha)}{2 \cos(\frac{7\pi}{2} + \alpha) - 3 \sin(17\pi + \alpha)} = \frac{1}{10}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.

۶۰ از تساوی $2 = \frac{2 \sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ ، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.

۶۱ اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم دایره ی مثلثاتی باشد، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{2} - x)$ را بدست آورید.

۶۲ اگر $\tan 20^\circ = 0.36$ باشد حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ را بدست آورید.

۶۳ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $\sin(-45^\circ) \times \tan(-60^\circ) - \cos(-60^\circ) \times \cot(-30^\circ)$

پ) $\frac{\tan(-45^\circ) + 2 \sin(-270^\circ)}{\cos(-360^\circ) - \cot(-45^\circ)}$

ت) $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + 2 \cos 120^\circ}{\tan \frac{3\pi}{4} + \sqrt{2} \cos 135^\circ}$

ث) $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$

ج) $\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \cot 225^\circ - 3 \cos 240^\circ \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\tan^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

۶۴ هر یک از زوایای زیر را به صورت تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید و علامت نسبت‌های مثلثاتی مربوط به هر کدام را تعیین کنید.

الف

$$\alpha = \frac{-7\pi}{3}$$

ب

$$\beta = \frac{7\pi}{8}$$

۶۵ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	330°
نسبت								
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

۶۶ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

$$\sin x = \cos(20^\circ + x)$$

۶۷ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

پ) $\tan(-1000^\circ) = \tan 8^\circ$

ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

۶۸ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \frac{3 \sin 15^\circ - \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{6} + \cos 30^\circ}{\cot(-135^\circ) - \sqrt{3} \tan \frac{5^\circ}{6}}$$

$$\text{ب) } \frac{2 \sin \frac{7\pi}{6} \times \tan \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{3}}{\cos^2(\frac{7\pi}{4}) + \cot^2(\frac{4\pi}{3})}$$

$$\text{پ) } 2 \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + 7 \sin(\pi - \alpha) - 3 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\text{ت) } \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cot(\pi - \alpha) + 3 \cos(\pi + \alpha) + \tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$$

$$\text{ث) } \sqrt{3} \cot \frac{7\pi}{3} + 2 \sin \frac{20\pi}{3} + 2 \cos \frac{5\pi}{3} \times \tan \frac{50\pi}{3}$$

$$\text{ج) } \frac{\tan 12^\circ \cos 21^\circ - \sin 225^\circ \cos 315^\circ}{\cot 135^\circ \sin 33^\circ - \cos 24^\circ \tan 225^\circ}$$

$$\text{چ) } 3 \tan \frac{29\pi}{6} - \sin \frac{39\pi}{4} + \cos \frac{27\pi}{4} - \cot \frac{34\pi}{3}$$

$$\text{ح) } 5 \sin^2(\frac{7\pi}{4}) + 2 \tan^2(\frac{4\pi}{3}) + 3 \cos(\frac{8\pi}{3}) - \cot^2(\frac{7\pi}{6})$$

$$\text{۶۹ اگر } \tan 15^\circ = 0,28 \text{ باشد، حاصل عبارت } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} \text{ را بدست آورید.}$$

$$\text{۷۰ اگر } \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ و انتهای کمان } \alpha \text{ در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، مقدار } \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \text{ را بدست آورید.}$$

$$\text{۷۱ حاصل عبارت } \sin(\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{4} + x) \text{ را بدست آورید.}$$

$$\text{۷۲ اگر } \tan \theta = 0,2 \text{ باشد، مقدار } \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} \text{ را بدست آورید.}$$

$$\text{۷۳ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.}$$

الف

$$\tan 135^\circ + \cot 12^\circ$$

ب

$$\cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ)$$

پ

$$\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ)$$

ت

$$\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ)$$

ث

$$\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4})$$

ج

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin(\frac{-3\pi}{4}) + \tan(\frac{-4\pi}{3})}$$

۷۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$A = \tan^2 \frac{\pi}{6} - \tan^2 \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{6} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\cos \pi}$$

ب

$$B = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{4} - \cos^4 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6}}$$

۷۵ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \tan\left(\frac{8\pi}{3}\right) \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(66^\circ) \cot(-30^\circ)$$

۷۶ مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

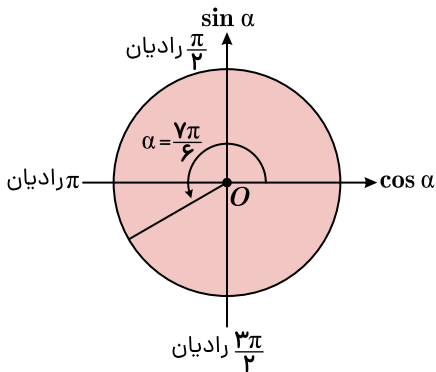
$$2 \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{7\pi}{4}$$

۷۷ در تساوی $\sin x = \cos(20^\circ + x)$ مقدار x چند درجه است؟

۷۸ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را به دو روش به دست آورید.

۷۹ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



۸۰ اگر $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{3}{5}$ و $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - a\right)$ را به دست آورید.

۸۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) =$$

ب

$$\frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)} =$$

پ

$$\cot\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) =$$

ت

$$\cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ) =$$

۸۲ مکمل هر یک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید:

الف

75°

ب

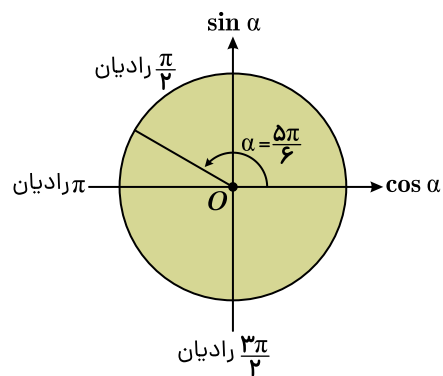
$$-25^\circ$$

پ

$$\frac{\pi}{12} \text{ رادیان}$$

ت

$$\frac{-\pi}{4} \text{ رادیان}$$



۸۳ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را به دست آورید.

الف

$$\sin \frac{5\pi}{6} =$$

ب

$$\cos \frac{5\pi}{6} =$$

پ

$$\tan \frac{5\pi}{6} =$$

ت

$$\cot \frac{5\pi}{6} =$$

۸۴ هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را با رسم شکل مشخص کنید.

الف

$$\sin 75^\circ =$$

ب

$$\tan(-315^\circ) =$$

پ

$$\cos 300^\circ =$$

ت

$$\sin 42^\circ =$$

ث

$$\tan(-225^\circ) =$$

ج

$$\cot(-330^\circ) =$$

ج

$$\sin \frac{11\pi}{4} =$$

ح

$$\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) =$$

۸۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل $\tan 37^\circ$ ، مقداری منفی است.

۸۶ مقدار عددی عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $A = \sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

ب) $B = \tan(60^\circ) + 2 \cos(24^\circ)$

۸۷ حاصل عبارت $\sin 21^\circ + \tan 12^\circ + \cos \frac{3\pi}{4}$ را به دست آورید.

۸۸ حاصل عبارت $\sin 39^\circ + \tan 135^\circ + \cos \frac{23\pi}{4}$ را به دست آورید.

۸۹ حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید.)

$$\cos(-39^\circ) + \tan(60^\circ) - \sin(33^\circ) =$$

۹۰ حاصل عبارت مقابل را بیابید:

$$A = \sin 12^\circ - \cos 15^\circ$$

۹۱ حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید.)

$$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$$

درس سوم: توابع مثلثاتی رسم توابع مثلثاتی و دوره ی تناوب

۹۲ بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = -2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3$ را در بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

۹۳ بُرد هر یک از توابع زیر را در دامنه‌ی داده شده بدست آورید.

الف) $y = 3 \sin x - 1 \quad [0, 2\pi]$

ب) $f(x) = 2 - 4 \cos x \quad [0, 2\pi]$

پ) $h(x) = 3 \sin^2 x - 2 \quad [0, 2\pi]$

ت) $y = 1 - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad [0, 2\pi]$

الف) $y_1 = \sin(4\pi - x)$, $y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

۹۴ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

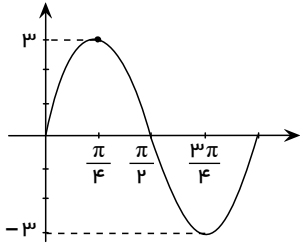
ب) $y_1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, $y_2 = \cos(\pi - x)$

پ) $y_1 = \sin(\pi - x)$, $y_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

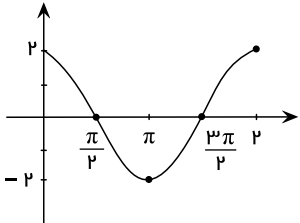


۹۵ معادله توابع مثلثاتی را که منحنی‌های آن‌ها داده شده است، تعیین کنید.

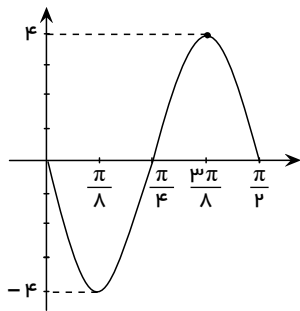
الف



ب

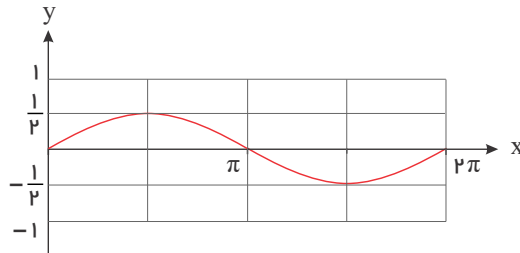


پ

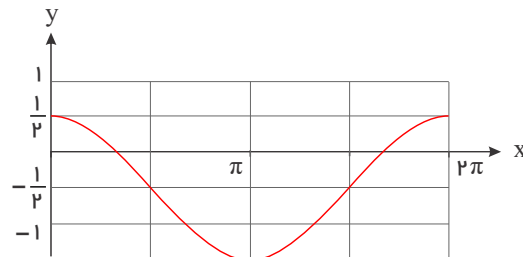


۹۶ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{3} \sin x$ را نشان می‌دهد.



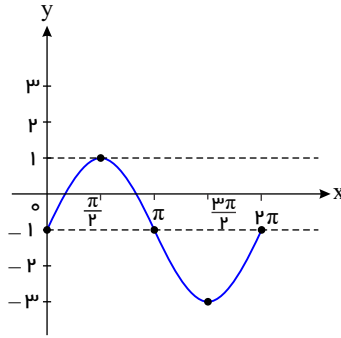
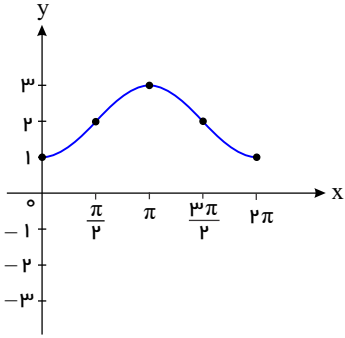
ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{3}$ را نشان می‌دهد.



پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x قرینه کنیم.

۹۷ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



الف) $y = 2 \cos x + 1$

ب) $y = 2 \sin x - 1$

پ) $y = 2 - \cos x$

ت) $y = \sin x - 2$

۹۸ نمودار توابع زیر را به کمک نقطه یابی رسم کنید.

الف

$$y = \frac{1}{2} \sin(\pi - 2x) + \frac{3}{2}; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ب

$$y = 3 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{2}\right) + 1; x \in [1, 5]$$

۹۹

نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۱۰۰ نمودار تابع زیر را در دستگاه مختصات در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

$$y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۱۰۱ نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

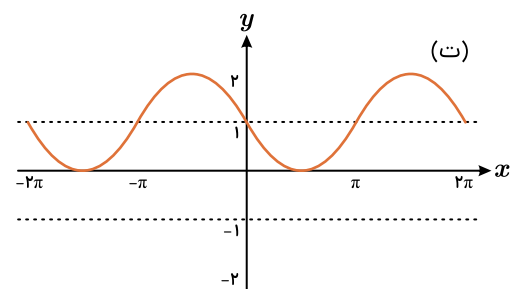
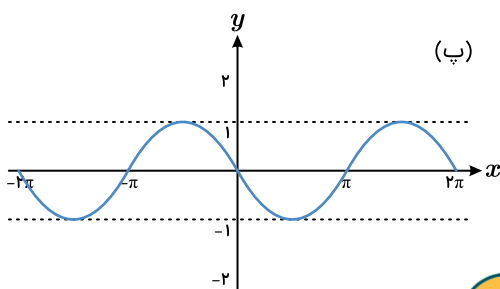
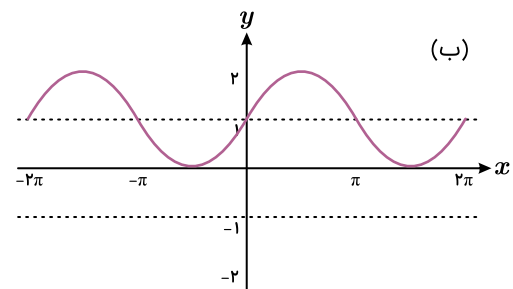
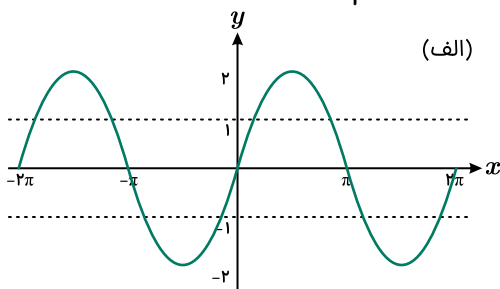
۱۰۲ هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$

۲) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

۳) $y = \sin x + 1$

۴) $y = -\sin x + 1$



۱۰۳) نمودار تابع $y = 2 \sin x - 1$ بر نمودار کدام یک از توابع زیر منطبق است؟ (با ذکر دلیل)

ب) $y = -2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1$

الف) $y = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 1$

۱۰۴) آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

الف)

$y = \sin x$, $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

ب)

$y = \cos x$, $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

پ)

$y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$

ت)

$y = \sin x$, $y = \sin(5\pi - x)$

۱۰۵) نمودار هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

الف)

$y = \frac{1}{2} \sin x$, $[0, 2\pi]$

ب)

$y = 2 \cos x + 1$, $[-2\pi, 2\pi]$

پ)

$y = 1 - \sin x$, $[-2\pi, 2\pi]$

ت)

$y = -1 + \cos x$, $[-4\pi, 4\pi]$

ث)

$y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $[0, 2\pi]$

ج)

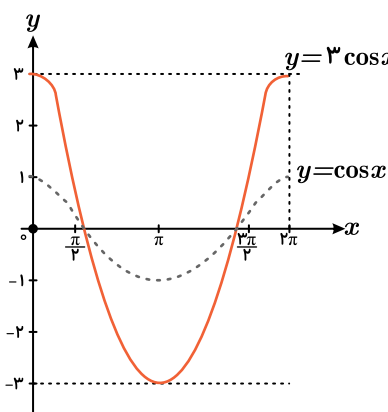
$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $[2\pi, 4\pi]$

۱۰۶) در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) حداکثر مقدار تابع کسینوس برابر است.

۱۰۷) هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازه $[0, 2\pi]$ با استفاده از نمودار تابع کسینوس

رسم کنید.



الف

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ب

$$y = \cos x - 1$$

پ

$$y = 1 - \frac{1}{2}\cos x$$

ت

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

۱۰۸) درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) نمودار تابع $f(x) = \cos\left(\frac{19\pi}{2} + x\right)$ بر نمودار تابع $g(x) = \sin x$ منطبق است.

۱۰۹) نمودار تابع $y = \cos x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۱۱۰) نمودار تابع $y = \sin x + 1$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

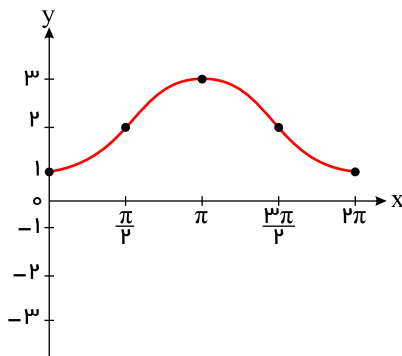
۱۱۱) الف) نمودار تابع $y = 2\sin x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

ب) برد تابع را به صورت بازه بنویسید.

۱۱۲) نمودار تابع $y = -\sin x + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکسیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.

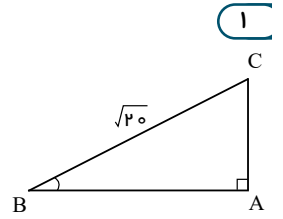
۱۱۳) نمودار رسم شده، مربوط به کدام ضابطه است؟ نمودار ضابطه دیگر را در بازه $[0, 2\pi]$ بنویسید.

الف: $y = 2\cos x + 1$ ب: $y = 2 - \cos x$



پاسخنامه تشریحی

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{AC}{\sqrt{20}} \rightarrow AC = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{100}}{5} = \frac{10}{5}$$



$$\rightarrow \boxed{AC = 2}, BC^2 = AC^2 + AB^2 \rightarrow (\sqrt{20})^2 = 2^2 + AB^2$$

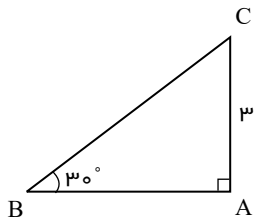
$$\rightarrow 20 = 4 + AB^2 \rightarrow AB^2 = 16 \rightarrow \boxed{AB = 4}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \rightarrow \boxed{\cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \rightarrow \boxed{\tan \hat{B} = \frac{1}{2}}, \cot \hat{B} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \boxed{\cot \hat{B} = 2}$$

$$y = ax + b \rightarrow a = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{(\sqrt{3}, -2)}$$

$$-2 = \sqrt{3}(\sqrt{3}) + b \rightarrow -2 = 3 + b \rightarrow b = -5 \rightarrow y = \sqrt{3}x - 5$$



$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AC}{BC} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{BC} \rightarrow \boxed{BC = 6}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{6} \rightarrow \boxed{AB = 3\sqrt{3}}$$

الف) $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

ب) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$

پ) $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ت) $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$

ث) $4 \times \frac{1}{2} \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = 2 + \sqrt{3}$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow BC^2 = 16 + 9$$

$$\rightarrow BC^2 = 25 \rightarrow \boxed{BC = 5}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \boxed{\sin \widehat{B} = \frac{3}{5}}, \quad \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \boxed{\cos \widehat{B} = \frac{4}{5}}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} \rightarrow \boxed{\tan \widehat{B} = \frac{3}{4}}, \quad \cot \widehat{B} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \boxed{\cot \widehat{B} = \frac{4}{3}}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \rightarrow \text{در ربع دوم قرار دارد} \quad \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{\tan \theta = -3}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{9}{10} \rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10} \rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{10}}}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\cot \theta = 2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\rightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow 5 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۳ یا ربع ۴} \\ \cot \theta > 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۱ یا ربع ۳} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \theta \text{ در ربع ۳ قرار دارد}$

ب) $\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۲ یا ربع ۳} \\ \tan \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۲ یا ربع ۴} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \theta \text{ در ربع ۲ قرار دارد}$

پ) $\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta > 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۱ یا ربع ۲} \\ \cos \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۲ یا ربع ۳} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \theta \text{ در ربع ۲ قرار دارد}$

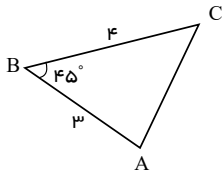
$$\sin \theta = -\frac{3}{5} \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos \theta = +\frac{4}{5}}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \rightarrow \boxed{\tan \theta = -\frac{3}{4}}$$

$$, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \rightarrow \boxed{\cot \theta = -\frac{4}{3}}$$

۱۰

$$a = 4, c = 3, \hat{B} = 45^\circ \rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\rightarrow S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{2}$$

۱۱

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow S_{\Delta ABC} = 5\sqrt{3}$$

۱۲

الف

$$x = 2k\pi$$

۱۳

$$D = \frac{\pi}{12} \times 180^\circ \rightarrow D = \frac{180^\circ}{12} \rightarrow D = 15^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 135^\circ \\ \alpha - \beta = 15^\circ \end{cases} +$$

$$2\alpha = 150^\circ \rightarrow \alpha = 75^\circ \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12} \text{ رادیان}$$

$$\beta = 60^\circ \rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \text{ رادیان}$$

۱۴

$$\begin{cases} \alpha = 2x, \beta = 3x, \gamma = 4x \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{5\pi}{4} \rightarrow 2x + 3x + 4x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow 9x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \end{cases}$$

$$\rightarrow \alpha = 2x = 2 \times \frac{5\pi}{36} \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{18} \text{ رادیان}, \alpha = 50^\circ$$

$$\rightarrow \beta = 3x = 3 \times \frac{5\pi}{36} \rightarrow \beta = \frac{5\pi}{12} \text{ رادیان}, \beta = 75^\circ$$

$$\rightarrow \gamma = 4x = 4 \times \frac{5\pi}{36} \rightarrow \gamma = \frac{5\pi}{9} \text{ رادیان}, \gamma = 100^\circ$$

۱۵ عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت در ۶۰ دقیقه یک دور کامل دایره (۲π رادیان) دوران می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{t}{60} = \frac{\frac{7\pi}{12}}{2\pi} \rightarrow \frac{t}{60} = \frac{7}{24} \rightarrow t = 17,5 \text{ دقیقه}$$

۱۶

$$\pi \simeq 3,14 \rightarrow -3\pi \simeq -9,42 \rightarrow -3\pi < -9 < -\frac{5\pi}{2}$$

۹- کمان -۲π - π < -9 < -۲π - π/۲ → در ناحیه سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد

$$\text{اختلاف زاویه دو شهر} = 44^\circ - 39^\circ = 5^\circ$$

$$\text{فاصله دو شهر} = \frac{\text{اختلاف زاویه دو شهر}}{360^\circ} \times 2\pi r = \left(\frac{5^\circ}{360^\circ}\right) \times 2 \times 3 \times 6400 = 533,3 \text{ km}$$

۱۷



۱۸ فاصله هر دو کابین متوالی برحسب رادیان برابر است با:

$$\frac{\text{زاویه کل دایره برحسب رادیان}}{\text{تعداد کابین}} = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40}$$

فرض کنید کابین ۱، $\frac{84\pi}{20}$ دوران کند، داریم:

$$\frac{84\pi}{20} = \frac{80\pi + 4\pi}{20} = 4\pi + \frac{4\pi}{20} = 4\pi + \frac{4\pi \times 2}{20 \times 2} = 4\pi + 8 \times \frac{\pi}{40}$$

یعنی کابین ۱ در موقعیت کابین ۸ قرار می‌گیرد.

بنابراین کابین ۵ در موقعیت کابین $13 = 8 + 5$ قرار می‌گیرد.

۱۹ عقربه ساعت‌شمار با گذشت یک ساعت 30° درجه $(\frac{\pi}{6})$ رادیان می‌پیماید. پس با گذشت نیم ساعت $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}$ رادیان طی می‌کند. عقربه دقیقه‌شمار

هر ۵ دقیقه 30° درجه می‌پیماید. پس با گذشت نیم ساعت (30°) دقیقه، $\pi = 6 \times \frac{\pi}{6}$ رادیان طی می‌کند. عقربه ثانیه‌شمار نیز هر دقیقه 360° درجه (2π) رادیان

طی می‌کند. پس با گذشت ۳ دقیقه، $60\pi = 30 \times 2\pi = 60\pi$ رادیان طی می‌کند.

۲۰

$$r = 10 \text{ cm} \quad \ell = 8 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{10} \rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

۲۱

$$D = \frac{\pi}{20} \times 180^\circ = 9^\circ \rightarrow \frac{\pi}{20} = 9^\circ$$

۲۲

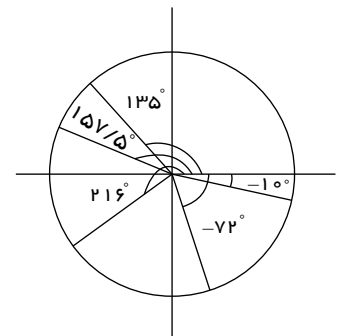
$$D = \frac{-\pi}{18} \times 180^\circ = -10^\circ \rightarrow -\frac{\pi}{18} = -10^\circ$$

$$D = \frac{-2\pi}{5} \times 180^\circ = -72^\circ \rightarrow -\frac{2\pi}{5} = -72^\circ$$

$$D = \frac{3\pi}{4} \times 180^\circ = 135^\circ \rightarrow \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

$$D = \frac{7\pi}{8} \times 180^\circ = 157.5^\circ \rightarrow \frac{7\pi}{8} = 157.5^\circ$$

$$D = \frac{6\pi}{5} \times 180^\circ = 216^\circ \rightarrow \frac{6\pi}{5} = 216^\circ$$



۲۳

$$R = \frac{-12^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{-\pi}{15} \rightarrow -12^\circ = -\frac{\pi}{15} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{36^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{5} \rightarrow 36^\circ = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{72^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{2\pi}{5} \rightarrow 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{-10.5^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{-7\pi}{12} \rightarrow -10.5^\circ = -\frac{7\pi}{12} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{315^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{7\pi}{4} \rightarrow 315^\circ = \frac{7\pi}{4} \text{ رادیان}$$

۲۴

۳۳

D (درجه)	5°	$25,7 \approx 26^\circ$	24°	72°	120°	225°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$

۳۴

$$\begin{aligned} 30^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{6} \text{ رادیان} & 36^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} & 45^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \\ 60^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{3} \text{ رادیان} & 90^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{2} \text{ رادیان} & 180^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \pi \text{ رادیان} \end{aligned}$$

۳۵

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی} = 360^\circ \rightarrow \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + x = 2\pi$$

$$\rightarrow \frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \frac{10\pi}{12} + x = \frac{24\pi}{12} \rightarrow x = \frac{24\pi}{12} - \frac{21\pi}{12} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان}} \text{ یا } \boxed{x = 45^\circ}$$

۳۶

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{10}{6} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{3} \text{ rad}}$$

$$D = \frac{5}{3} \times 180 \rightarrow D = \frac{300}{\pi} \rightarrow \boxed{D \approx 95,5^\circ}$$

۳۷

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{4}{3,14} \rightarrow \boxed{D \approx 229,3^\circ}$$

۳۸

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + x = \pi \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{12\pi - 4\pi - 3\pi}{12}$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{12} \text{ رادیان}} \quad \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi} \rightarrow \boxed{D = 75^\circ}$$

۳۹

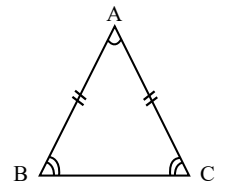
الف

$$\hat{A} = 1 \text{ rad} \quad , \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \quad , \quad \hat{B} = \hat{C}$$

$$\rightarrow 1 + \hat{B} + \hat{C} = \pi \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - 1$$

$$\rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi - 1}{2} \approx 1,07 \text{ rad}$$

$$\hat{B} + \hat{C} > \hat{A} \rightarrow AC = AB > BC \rightarrow \text{گزاره درست است}$$



ب

$$r = 1 \text{ cm} \quad , \quad \alpha = \pi \text{ rad} \quad , \quad l \approx 3,14 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow l = \alpha \cdot r = \pi \times 1 \approx 3,14 \text{ cm} \rightarrow \text{گزاره درست است}$$

پ

$$D = \frac{6\pi}{\pi} \times 180^\circ \rightarrow D = 216^\circ \rightarrow \text{گزاره نادرست است} \rightarrow \text{انتهای کمان در } 216^\circ \text{ در ربع سوم قرار دارد}$$

ت



$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi}{36} + \frac{4\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \neq \pi$$

گزاره نادرست است.

۴۰

الف

 7π

۴۱

الف

 205°

۴۲

درست الف

۴۳

چهارم الف

۴۴

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{\sin \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{x} \\ y = 3 \cot \alpha \rightarrow \cot \alpha = \frac{y}{3} \end{array} \right\} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{2}{x}\right)^2}$$

$$\rightarrow 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \quad \text{یا} \quad \boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1}$$

۴۵

$$\text{الف)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - (\sqrt{3})^2}{1} = \frac{3}{9} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

$$\text{پ)} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{ت)} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ث)} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 3\left(\sin^2 \frac{7\pi}{15} + \cos^2 \frac{7\pi}{15}\right) = \frac{\frac{3}{4} + 3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} - 3(1) = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{6}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

۴۶

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \rightarrow \boxed{\cos \theta = -\frac{4}{5}}$$

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \rightarrow \boxed{\tan \theta = -\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 + \frac{9}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}}{\frac{16}{16} - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{7}{16}} \rightarrow \boxed{\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{25}{7}}$$

۴۷

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{5}{25} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{20}{25} \rightarrow \boxed{\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} \rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{1}{2}}$$

۴۸

$$\tan x = -\frac{1}{2}, \cos x < 0 \rightarrow 90^\circ < x < 180^\circ \text{ یا } x = \text{ناحیه دوم}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\cot x = -2}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 5 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ یا } \boxed{\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

۴۹

$$\frac{3 \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{3 \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}} = \frac{3 \tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} = \frac{3(4) - 1}{4 + 1} = \frac{11}{5}$$

۵۰

$$\tan \theta < 0, \sin \theta < 0 \rightarrow 270^\circ < \theta < 360^\circ \text{ یا } \theta = \text{ربع چهارم}$$

$$\tan \theta = -2 \rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-2} \rightarrow \boxed{\cot \theta = -\frac{1}{2}}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}}$$

۵۱

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \boxed{\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \rightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{-\sqrt{15}}{15}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} \rightarrow \boxed{\cot \alpha = -\sqrt{15}}$$

۵۲

زاویه α نسبت	رادیان 0°	رادیان $30^\circ = \frac{\pi}{6}$	رادیان $45^\circ = \frac{\pi}{4}$	رادیان $60^\circ = \frac{\pi}{3}$	رادیان $90^\circ = \frac{\pi}{2}$	رادیان $180^\circ = \pi$	رادیان $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	رادیان $360^\circ = 2\pi$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۵۳

چون $\cos x < 0$ و $\sin x > 0$ پس انتهای کمان x در ربع دوم قرار دارد.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \text{ و } \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3}$$

۵۴

$$\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + 1 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{20}{18} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}$$

۵۵

$$\begin{aligned} & 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) \\ &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) + \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) \\ &= 3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 3 \times 0.8 = 2.4 \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\sin(7\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$\rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-2 \sin \alpha} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 6 \rightarrow 2 \tan \alpha = 6 \rightarrow \boxed{\tan \alpha = 3}$$

۵۶

$$\sin\left(\frac{-179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{-179\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{179\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{6}\right) + \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

۵۷

۵۸

$$\left(\sqrt{3}k \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 32\left(\frac{k}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) + 3\left(\tan \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 3 = 0 \rightarrow (k+1)(k+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -3 \end{cases}$$

۵۹

$$\frac{\sin(\cancel{\pi} + \frac{3\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(\cancel{\pi} + \pi - \alpha)}{2 \cos(\cancel{\pi} + \frac{3\pi}{2} + \alpha) - 3 \sin(\cancel{\pi} + \pi + \alpha)} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos \alpha + 2(-\cos \alpha)}{2 \sin \alpha - 3(-\sin \alpha)} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{-3 \cos \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{1}{10} \rightarrow 5 \sin \alpha = -3 \cos \alpha$$

$$\rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-3}{5} \rightarrow \boxed{\tan \alpha = -\frac{3}{5}}$$

۶۰

$$\sin(\alpha - 3\pi) = \sin(\alpha - 3\pi + 4\pi) = \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\rightarrow \frac{-2 \sin \alpha + \sin \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \rightarrow \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \rightarrow \boxed{\tan \alpha = 2}$$

۶۱

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{10}} \rightarrow 1 + \tan^2 x = 10 \rightarrow \tan^2 x = 9$$

ناحیه سوم $\rightarrow \boxed{\tan x = 3}, \quad \boxed{\cot x = \frac{1}{3}}$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x = \frac{1}{3}$$

۶۲

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ - (-\cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{0,36 + 1}{-0,36 + 1} = \frac{1,36}{0,64} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

۶۳

$$\text{الف)} = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cos \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ب)} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{پ)} = \frac{-\tan 45^\circ - 2 \sin 270^\circ}{\cos 360^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{-1 - 2(-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos(180^\circ - 60^\circ)}{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} \cos(180^\circ - 45^\circ)}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos 60^\circ}{-\tan \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})}{-1 - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-1 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ث)} = \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos(\pi - \frac{5\pi}{14}) + \cos(\pi - \frac{3\pi}{14}) =$$

$$= \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} + \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} + \cos \frac{7\pi}{14} - \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} - \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} = \cos \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{ج)} = \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{2}) \times \cot(180^\circ + 45^\circ) - 3 \cos(180^\circ + 60^\circ) \tan(\pi + \frac{\pi}{2})}{(\tan(\pi + \frac{\pi}{2}))^2 + (\cos(\pi + \frac{\pi}{2}))^2}$$

$$= \frac{-\sin \frac{\pi}{2} \times \cot 45^\circ - 3(-\cos 60^\circ) \times \tan \frac{\pi}{2}}{\tan^2(\frac{\pi}{2}) + (-\cos \frac{\pi}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{2} \times 1 - 3(-\frac{1}{2})(1)}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

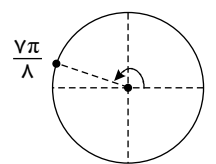
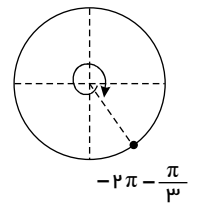
$$= \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha = \frac{-7\pi}{3} = -\left(\frac{6\pi + \pi}{3}\right) = -2\pi - \frac{\pi}{3}$$

- $\sin \alpha < 0$
- $\cos \alpha > 0$
- $\tan \alpha < 0$
- $\cot \alpha < 0$

$$\beta = \frac{7\pi}{8}$$

- $\sin \beta > 0$
- $\cos \beta < 0$
- $\tan \beta < 0$
- $\cot \beta < 0$



زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
نسبت								
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

$$\rightarrow x + 20^\circ + x = 90^\circ + (k \times 360^\circ)$$

$$k = 0 \rightarrow 2x = 70^\circ \rightarrow \boxed{x = 35^\circ}$$

$$k = 1 \rightarrow 2x + 20 = 450^\circ \rightarrow 2x = 430^\circ \rightarrow \boxed{x = 215^\circ}$$

$$k = 2 \rightarrow 2x + 20 = 810^\circ \rightarrow 2x = 790^\circ \rightarrow x = 395^\circ \rightarrow x = 35^\circ \text{ تکراری}$$

۶۷

$$\text{الف) } \sin 184^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 12^\circ) = \sin(12^\circ) = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$$

$$\text{ب) } \cos(-324^\circ) = \cos(36^\circ - 324^\circ) = \cos(36^\circ)$$

$$\text{پ) } \tan(-1000^\circ) = \tan(3 \times 360^\circ - 1000^\circ) = \tan 80^\circ$$

$$\text{ت) } \sin 875^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

۶۸

$$\text{الف) } = \frac{3 \sin(180^\circ - 30^\circ) - \sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + \cos(360^\circ - 60^\circ)}{-\cot(135^\circ) - \sqrt{3} \tan(\pi - \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{3 \sin 30^\circ - \sqrt{2}(-\cos \frac{\pi}{6}) + \cos(-60^\circ)}{-\cot(180^\circ - 45^\circ) - \sqrt{3}(-\tan \frac{\pi}{6})} = \frac{3 \sin 30^\circ + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} + \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3(\frac{1}{2}) + \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) } = \frac{2 \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) \times \tan(2\pi - \frac{\pi}{3})}{\cos^2(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \cot^2(\pi + \frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{2(-\sin \frac{\pi}{6}) \times \tan(\frac{\pi}{6}) - (-\cos \frac{\pi}{6})(-\tan \frac{\pi}{3})}{\cos^2 \frac{\pi}{6} + \cot^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2(-\frac{1}{2})(1) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{13}{12}} = -\frac{6}{13} = -\frac{6}{13}$$

$$\text{پ) } 2(-\sin \alpha) + 7 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = -2 \sin \alpha + 7 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\text{ت) } = -\cos \alpha - \cancel{\cot \alpha} + 3(-\cos \alpha) + \cancel{\cot \alpha} = -4 \cos \alpha$$

$$\text{ث) } = \sqrt{3} \cot(\cancel{\pi} + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(\cancel{\pi} + \frac{2\pi}{3}) + 2 \cos(\cancel{\pi} - \frac{\pi}{3}) \times \tan(\cancel{\pi} + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2(\sin \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times (-\tan \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}) + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2(\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & \frac{\tan(18^\circ - 6^\circ) \cos(18^\circ + 3^\circ) - \sin(18^\circ + 45^\circ) \cos(36^\circ - 45^\circ)}{\cot(18^\circ - 45^\circ) \sin(36^\circ - 3^\circ) - \cos(18^\circ + 6^\circ) \tan(18^\circ + 45^\circ)} \\ &= \frac{-\tan 6^\circ (-\cos 3^\circ) - (-\sin 45^\circ) \cos 45^\circ}{-\cot 45^\circ (-\sin 3^\circ) - (-\cos 6^\circ) \tan 45^\circ} = \frac{(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(-1)(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})(1)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & 3 \tan(\cancel{\pi} + \frac{5\pi}{6}) - \sin(\cancel{\pi} - \frac{\pi}{4}) + \cos(\cancel{\pi} + \frac{3\pi}{4}) - \cot(\cancel{\pi} + \frac{4\pi}{3}) \\ &= 3 \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) - \sin(-\frac{\pi}{4}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) - \cot(\pi + \frac{\pi}{3}) \\ &= 3(-\tan \frac{\pi}{6}) + \sin \frac{\pi}{4} + (-\cos \frac{\pi}{4}) - \cot \frac{\pi}{3} \\ &= 3(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & 5 \sin^2(\cancel{\pi} - \frac{\pi}{4}) + 2 \tan^2(\pi + \frac{\pi}{3}) + 3 \cos(\cancel{\pi} + \frac{2\pi}{3}) - \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6}) \\ &= 5(-\sin \frac{\pi}{4})^2 + 2(\tan \frac{\pi}{3})^2 + 3 \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) - (\cot \frac{\pi}{6})^2 \\ &= 5(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2(\sqrt{3})^2 + 3(-\frac{1}{2}) - (\sqrt{3})^2 \\ &= 5(\frac{1}{2}) + 2(3) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{5}{2} + 6 - \frac{3}{2} - 3 = 4 \end{aligned}$$

$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$, $\sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$

$\sin 525^\circ = \sin(\cancel{360^\circ} + 180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$, $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \\ &= \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{128}{-72} = -\frac{16}{9} \end{aligned}$$

$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (-\frac{2\sqrt{2}}{3})^2$

$\rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی چهارم}} \boxed{\cos \alpha = \frac{1}{3}}$

$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

$\sin(\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + \sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin x + \sin x - \sin x - \sin x = 0$

۶۹

۷۰

۷۱

۷۲

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0.2 + 1}{2(0.2)} = \frac{1.2}{0.4} = \frac{12}{4} = 3$$

الف

$$\tan 135^\circ + \cot 12^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot(180^\circ - 6^\circ) = -\tan 45^\circ - \cot 6^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ب

$$\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = \cos(210^\circ) + \cot(240^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) + \cot(180^\circ + 60^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ + \cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

$$\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ) = \sin(72^\circ - 9^\circ) + \tan(-36^\circ - 18^\circ)$$

$$= \sin(-9^\circ) + \tan(-18^\circ) = -\sin 9^\circ - \tan 18^\circ = -1 - 0 = -1$$

$$\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ)$$

$$= \cos(-72^\circ + 72^\circ) + \cot(72^\circ - 60^\circ) + \tan(72^\circ + 0^\circ) - \tan(72^\circ - 60^\circ) =$$

$$\cos(0^\circ) + \cot(12^\circ) + \tan(0^\circ) - \tan(12^\circ) =$$

$$\cos(0^\circ) + \cot(180^\circ - 60^\circ) + \tan(0^\circ) - \tan(180^\circ - 60^\circ) =$$

$$\cos(0^\circ) - \cot(60^\circ) + \tan(0^\circ) + \tan(60^\circ) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(6\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۳

پ

ت

ث

ج

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{2\pi}{3}) + \tan(-\frac{2\pi}{3})} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{\sin(2\pi - \frac{2\pi}{3}) + \tan(2\pi - \frac{2\pi}{3})}$$

$$= \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) + \tan(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{\sin \frac{\pi}{3} - (-\cos \frac{\pi}{6})}{-\sin \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \underbrace{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}_{\text{صفر}} + \frac{1^2}{-1} = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$$

$$B = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0$$

$$\tan\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(66^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cot(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - 1}{2}$$

$$\text{76} \quad \sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = 35^\circ \quad \text{77}$$

78 روش اول: انتهای کمان 135° در ربع دوم واقع است و $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ ، یعنی دو زاویه 135° و 45° مکمل یکدیگرند؛ بنابراین:

78

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cot 135^\circ = \cot(180^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

روش دوم: اختلاف دو زاویه 135° و 45° برابر 90° است؛ یعنی $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ بنابراین:

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = +\cos 45^\circ = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \tan(90^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\cot 135^\circ = \cot(90^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{7\pi}{6} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{2} - a\right) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{2} - a) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$-\cot \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$$

$$\frac{\cos 90^\circ - \sin 270^\circ}{-\sin 180^\circ - \cos 360^\circ} = \frac{0 - (-1)}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$-\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$\cos 45^\circ \times \cos 60^\circ + (-\sin 45^\circ) \times (-\sin 60^\circ) = \cos 45^\circ \times \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

۷۹

۸۰

۸۱

الف

ب

پ

ت

۸۲

الف

$$75^\circ \Rightarrow 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$-25^\circ \Rightarrow 180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{12} \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\text{رادیان } \frac{-\pi}{4} \Rightarrow \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$$

ب

پ

ت

۸۳

الف

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

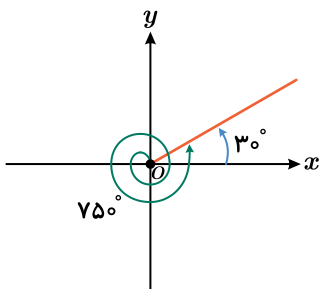
ب

پ

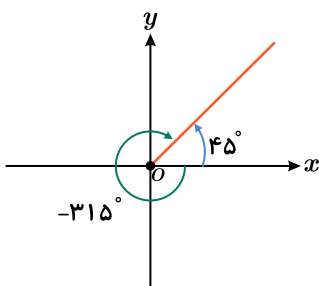
ت

۸۴

الف



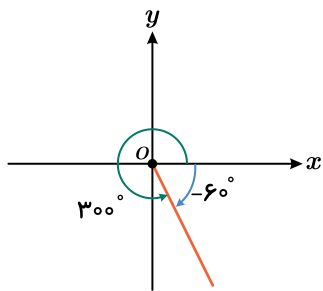
$$\sin 75^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$



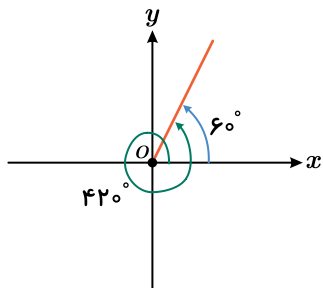
$$\begin{aligned} \tan(-315^\circ) &= -\tan(315^\circ) = -\tan(36^\circ - 45^\circ) = -\tan(-45^\circ) \\ &= -(-\tan 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

ب

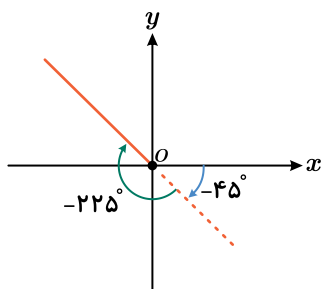
پ



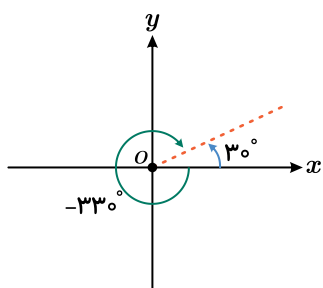
$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$



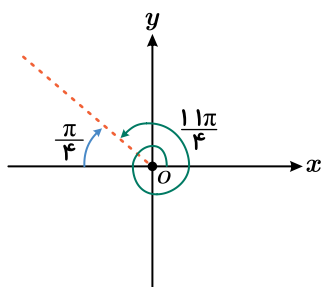
$$\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\tan(-225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$



$$\cot(-330^\circ) = -\cot 330^\circ = -\cot(360^\circ - 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$



$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

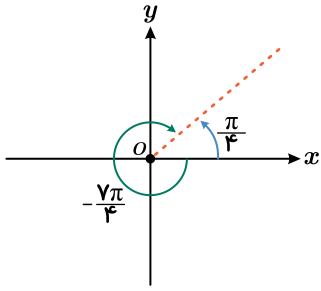
ت

ث

ج

د

ه



$$\cos\left(\frac{-\sqrt{2}\pi}{4}\right) = \cos\frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = \sin\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \tan(3 \times 18^\circ + 6^\circ) + 2 \cos(18^\circ + 6^\circ) = \tan 60^\circ - 2 \cos 60^\circ = \sqrt{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$$

$$\sin(18^\circ + 3^\circ) + \tan(18^\circ - 6^\circ) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + (-\sqrt{3}) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-1 - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 39^\circ + \tan 135^\circ + \cos \frac{23\pi}{4} &= \sin(36^\circ + 3^\circ) + \tan(18^\circ - 45^\circ) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin 39^\circ - \tan 45^\circ + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2 \times 18^\circ + 3^\circ) + \tan(3 \times 18^\circ + 6^\circ) - \sin(2 \times 18^\circ - 3^\circ) &= \cos(39^\circ) + \tan(60^\circ) + \sin(33^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

$$A = \sin(9^\circ + 3^\circ) - \cos(18^\circ - 3^\circ) = \cos 30^\circ - (-\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0$$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \geq -2 \xrightarrow{+2}$$

۸۵

الف نادرست

۸۶

الف

ب

۸۷

۸۸

۸۹

۹۰

۹۱

۹۲

$$\delta \geq -2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3 \geq 1 \rightarrow \delta \geq y \geq 1 \begin{cases} y_{\max} = 5 \\ y_{\min} = 1 \end{cases}$$

۹۳

$$\text{الف) } -1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \xrightarrow{-1} -4 \leq 3 \sin x - 1 \leq 2$$

$$\rightarrow -4 \leq y \leq 2 \rightarrow R_y = [-4, 2]$$

$$\text{ب) } -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times(-4)} 4 \geq -4 \cos x \geq -4 \xrightarrow{+2} 6 \geq 2 - 4 \cos x \geq -2$$

$$\rightarrow 6 \geq y \geq -2 \rightarrow R_f = [-2, 6]$$

$$\text{پ) } -1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3 \sin^2 x \leq 3$$

$$\xrightarrow{-2} -2 \leq 3 \sin^2 x - 2 \leq 1 \rightarrow -2 \leq y \leq 1 \rightarrow R_h = [-2, 1]$$

$$\text{ت) } -1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} 2 \geq -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -2 \xrightarrow{+1}$$

$$3 \geq 1 - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -1 \rightarrow 3 \geq y \geq -1 \rightarrow R_y = [-1, 3]$$

۹۴

$$\text{الف) } \begin{cases} y_1 = \sin(3\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x \\ y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} y_1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x \\ y_2 = \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} y_1 = \sin(\pi - x) = \sin x \\ y_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند}$$

۹۵

الف) طبق شکل دوره تناوب برابر $T = \pi$ است. با در نظر گرفتن شکل کلی تابع به صورت $y = a \sin bx$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = \pm 2$$

با در نظر گرفتن $b = \pm 2$ ، طبق شکل $a = \pm 3$ خواهد بود.

$$y = 3 \sin(2x) \quad (1)$$

در حالت کلی برای توابع به صورت $y = a \sin bx$ ، $ab > 0$ و برای $y = a \cos bx$ ، $ab < 0$. اگر در این سؤال $b = -2$ را در نظر بگیریم، برای a نیز داریم:

$$a = -3 \quad \text{بنابراین: } (2) \quad y = -3 \sin(-2x) \quad \text{و } (1) \quad \text{و } (2) \quad \text{قابل قبول اند.}$$

ب) طبق شکل دوره تناوب برابر $T = 2\pi$ است. با در نظر گرفتن شکل کلی تابع به صورت $y = a \cos bx$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

هر دو قابل قبول اند.

از طرفی از روی نمودار داریم: $a = 2$ ، بنابراین: $y = 2 \cos x$

اگر شکل به صورت باشد، مقدار a برابر ۲- خواهد بود.

ب) طبق شکل، دوره تناوب برابر $T = \frac{\pi}{2}$ است.

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = \pm 2$$

با در نظر گرفتن $b = +2$ طبق شکل برای a داریم: $a = -2$.

اگر $b = -2$ را در نظر بگیریم، برای a داریم: $a = 2$.

$$y = -2 \sin 2x \quad y = 2 \sin(-2x)$$

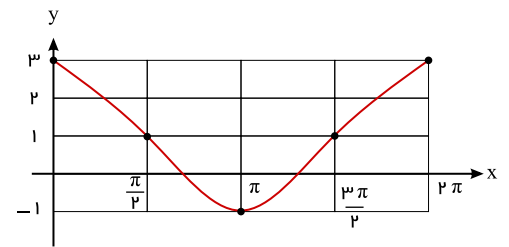
۹۶ الف - درست، برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2} \sin x$ کافی است برد نمودار $y = \sin x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.

ب - درست، برای رسم نمودار $y = \cos x - \frac{1}{2}$ کافی است نمودار $y = \cos x$ را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

پ - نادرست، برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور y ها انتقال دهیم.
ت - درست

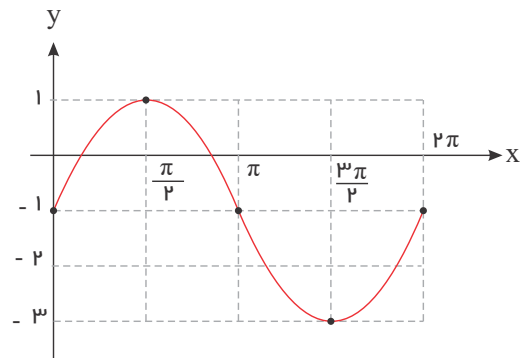
۹۷ الف

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱
$2 \cos x + 1$	۳	۱	-۱	۱	۳



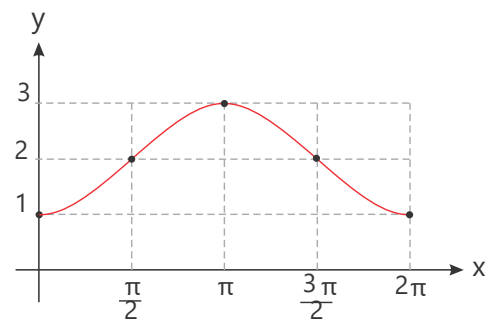
ب

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$2 \sin x - 1$	-۱	۱	-۱	-۳	-۱



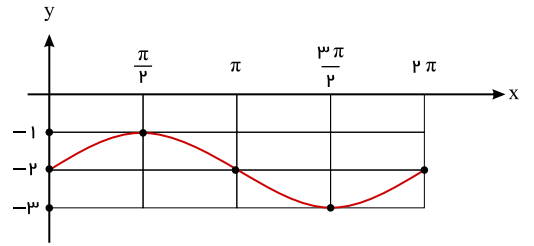
پ

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱
$2 - \cos x$	۱	۲	۳	۲	۱



ت

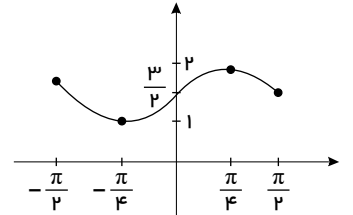
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin x - 2$	-2	-1	-2	-3	-2



۹۸

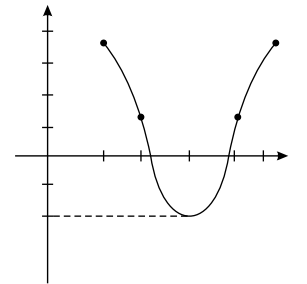
الف

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
y	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

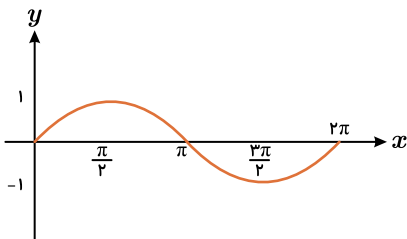
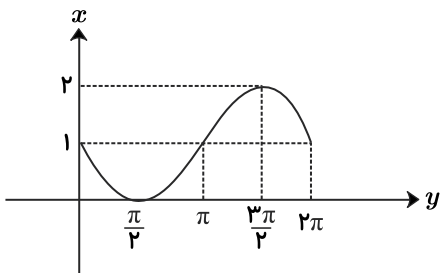


ب

x	1	2	3	4	5
y	4	1	-2	1	4

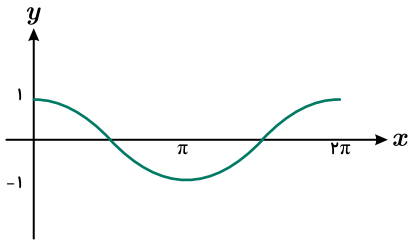


۹۹

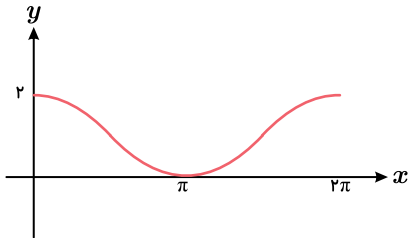


۱۰۰

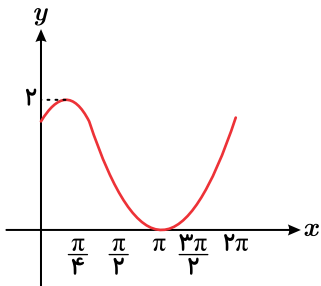
مرحله اول $y = \sin(x)$



$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ مرحله دوم}$$



$$y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ مرحله سوم}$$



۱۰۱

۱۰۲ نمودار تابع (۱) شکل (الف) است. نمودار تابع (۲) شکل (ب) است.

نمودار تابع (۳) شکل (ب) است. نمودار تابع (۴) شکل (ت) است.

۱۰۳ ضابطه هر یک از توابع (الف) و (ب) را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 1 = 2 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) - 1 \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = -2 \sin x - 1 \end{aligned}$$

پس نمودار تابع $y = 2 \sin x - 1$ بر نمودار تابع $y = -2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1$ یعنی نمودار قسمت (ب) منطبق است.

۱۰۴

الف

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

ب

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

پ

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

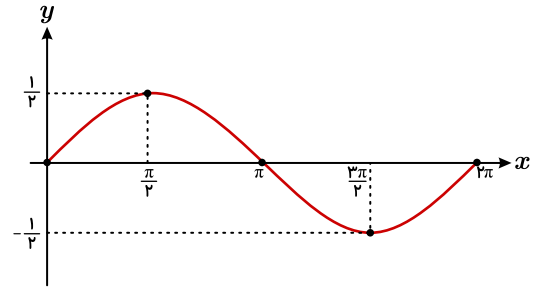
ت

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \sin(\delta\pi - x) = \sin(\cancel{\pi} + \pi - x) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

۱۰۵

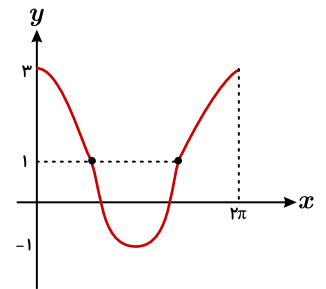
الف

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\frac{1}{2}\sin x$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	۰



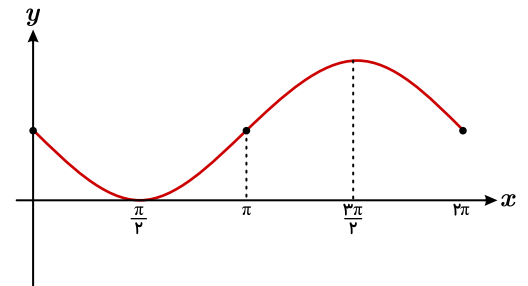
ب

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱
$2\cos x + 1$	۳	۱	-۱	۱	۳



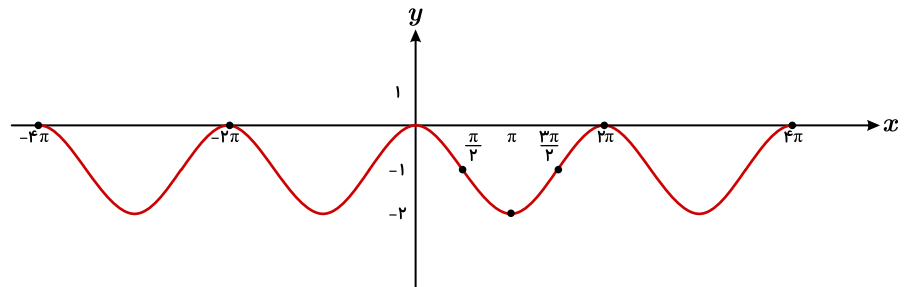
پ

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$1 - \sin x$	۱	۰	۱	۲	۱



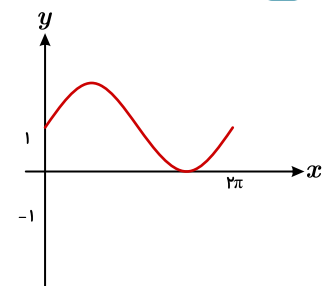
ت

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\cos x - 1$	۰	-۱	-۲	-۱	۰



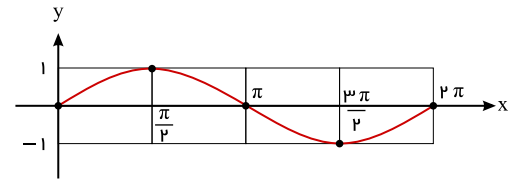
ث

x	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2π
$\sin(x + \frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۰	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	۲	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$



ج

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x - \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x - \frac{\pi}{2})$	0	1	0	-1	0



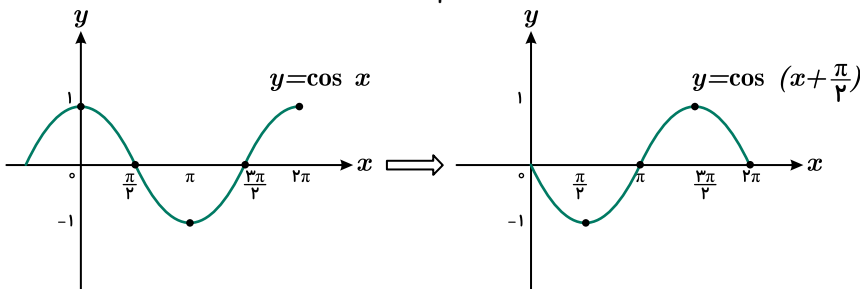
۱۰۶

الف یک

۱۰۷

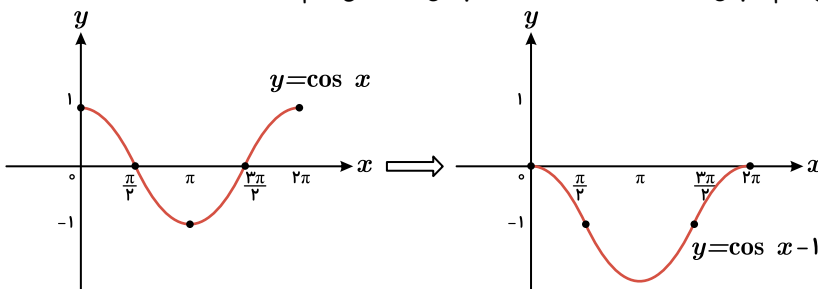
الف

الف) برای رسم $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم سپس آن را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



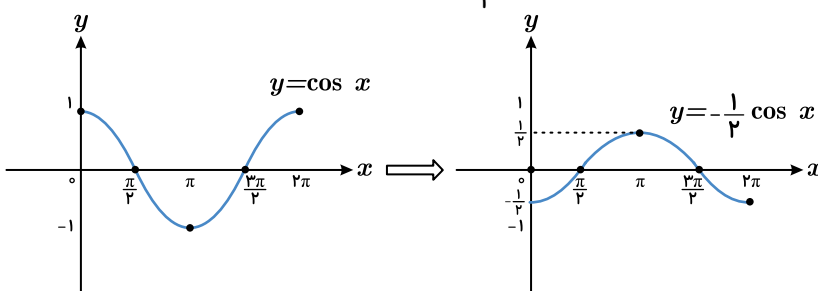
ب

ب) برای رسم $y = \cos x - 1$ ابتدا $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازه یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

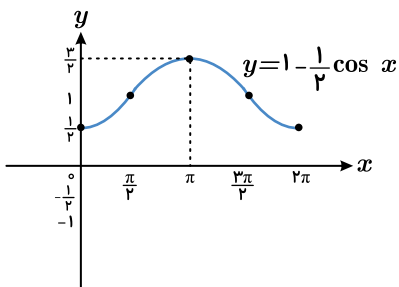


پ

پ) برای رسم $y = 1 - \frac{1}{2}\cos x$ ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = \frac{-1}{2}\cos x$ را رسم می‌کنیم.

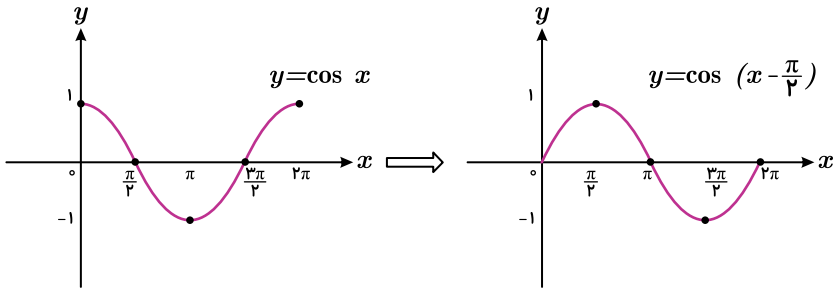


در ادامه نمودار به دست آمده را به اندازه یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

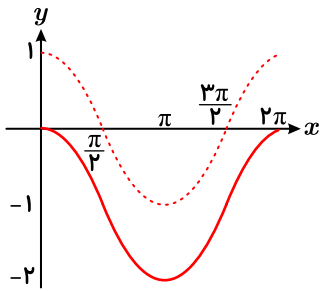


ت

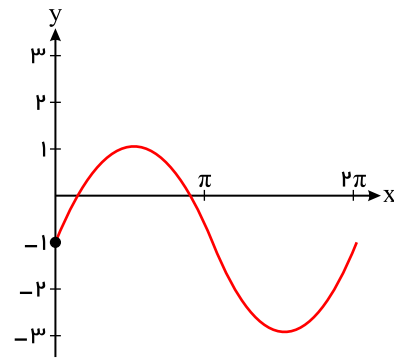
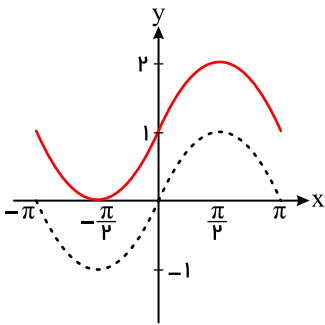
ت) برای رسم $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$ ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به راست منتقل می‌کنیم.



۱۰۸
الف درست
۱۰۹



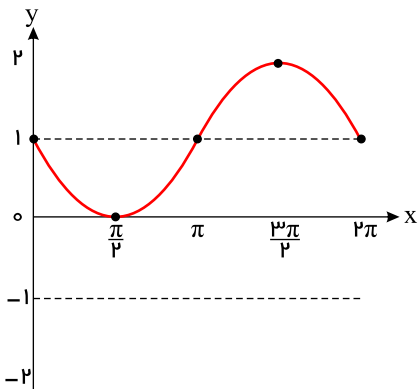
۱۱۰



$R = [-3, 1]$ (ب)

الف ۱۱۱

۱۱۲



مقدار مینیمم = ۰

مقدار ماکسیمم = ۲

۱۱۳

