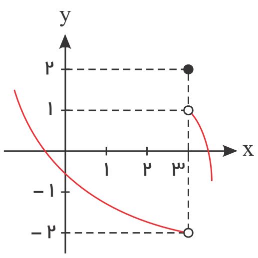
فصل ششم : حد و پیوستگی

فصل ششم : حد و پیوستگی

درس اول : فرآیندهای حدی

بررسی حد روی نمودارها و اشکال هندسی

۱) شکل مقابل نمودار تابع f است، حاصل $\lim_{x\to ۳^-} f(x) + \lim_{x\to ۳^+} f(x) + f(۳)$ را بدست آورید.



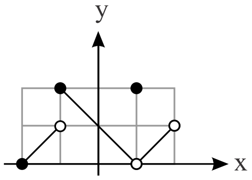
۲) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = ۱$ بررسی کنید.

۳) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x\to ۲} f(x) = ۴$

۴) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(۳) = ۱$

۵) مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی -۱ باشد.

۶) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۲$

ب) $f(۱) = ۲$

پ) $f(۲) = ۱$

ت) $\lim_{x\to -۲^+} f(x) = ۰$

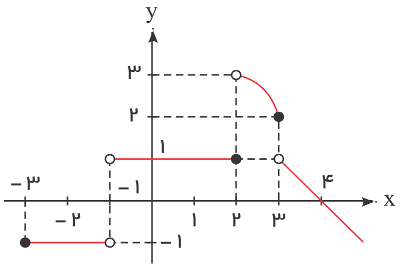
ث) $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۲$

ج) $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$

چ) $\lim_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۷) نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to (-۳)^+} f(x)$

ح) $\lim\limits_{x\to (-۳)^-} f(x)$

خ) $f(-۳)$

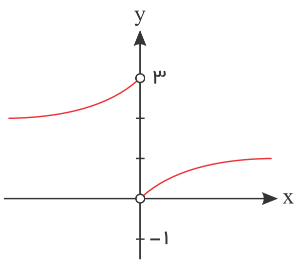
د) $f(۲)$

ذ) $f(۳)$

ر) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

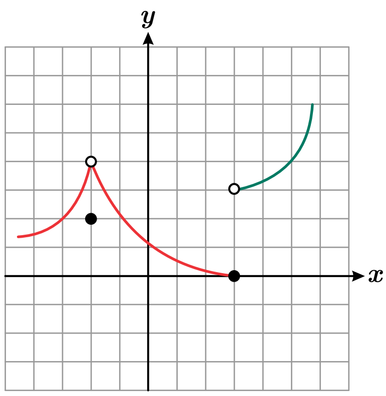
ز) $\lim\limits_{x\to (-۲)} f(x)$

۸) شکل زیر، نمودار تابع f است. $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ را محاسبه کنید.



۹) نموداری از یک تابع رسم کنید که در نقطه $x=۲$، حد راست آن تابع برابر ۳ است ولی حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ برابر ۲ باشد.

۱۰) با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} (x+f(x))$

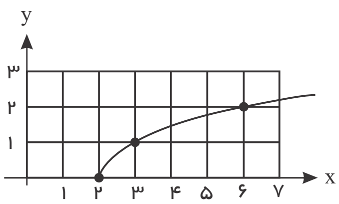
۱۱) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-۲}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

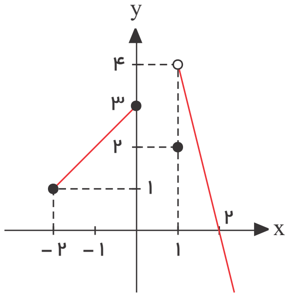
ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

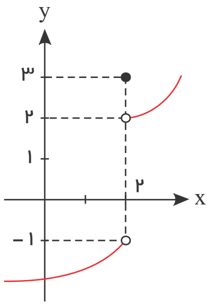
ت) $f(۲)$



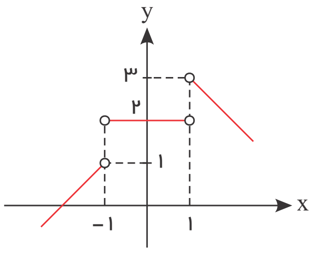
۱۲ با کمک نمودار زیر مقدار عبارت $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) - ۴\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) + ۲f(۱)$ را بدست آورید.



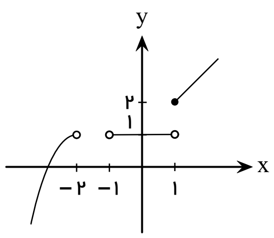
۱۳ شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) + f(۲)$ را محاسبه کنید.



۱۴ با توجه به شکل زیر مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) - \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$ را بدست آورید.



۱۵ با توجه به نمودار داده‌شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.



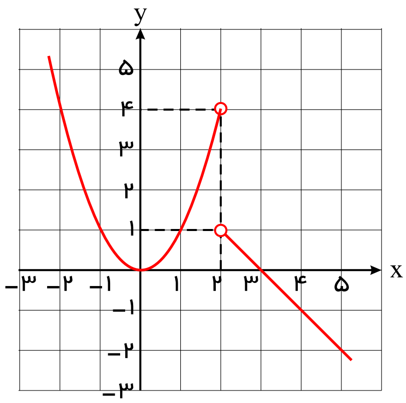
الف حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ برابر ۲ است.

ب حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ برابر ۱ است.

پ حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ برابر ۲ است.

ت حاصل حد $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ برابر ۱ است.

۱۶ با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.



الف

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) =$

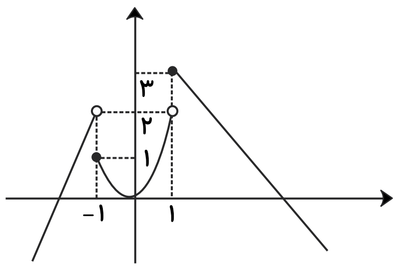
ب

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) =$

پ

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x) =$

۱۷ نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است:

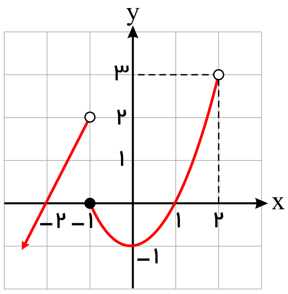


الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$

پ) آیا تابع f در بازهٔ $[-۱, ۱]$ پیوسته است؟

۱۸ با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.

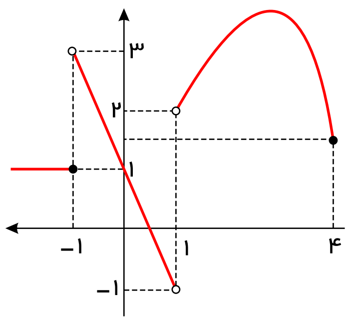


الف) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) =$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) =$

۱۹ با توجه به نمودار حاصل را بیابید.



$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) - ۳\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) + ۳f(-۱) =$

بررسی حد در توابع چند ضابطه ای

۲۰ تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & , \ x > ۲ \\ ax^۲ + ۳bx + ۱ & , \ x < ۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۵$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۷$ باشد حاصل $a+b$ را بدست آورید.

۲۱ اگر $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود است؟

۲۲ تابع $f(x) = \begin{cases} (a-۱)x+۵ & , \ x > -۲ \\ x^۲ + ۲b & , \ x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to (-۱)} f(x) = ۲$ و $\lim\limits_{x\to (-۴)} f(x) = ۸$ باشد، a و b را بدست آورید.

۲۳ اگر $f(x) = \begin{cases} ax-۱ & , \ x < ۱ \\ x^۲ + ۲a & , \ x \geq ۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^+} (x) = -۱$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۲۴ اگر در تابع $f(x)=\begin{cases} x-a & x\geq ۱ \\ x^۲+۲a & x<۱ \end{cases}$، مقدار حد راست در $x=۱$، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a را بدست آورید.

۲۵ اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+۲}{x+۱} & x>۱ \\ ۲x+a & x<۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۳$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۲۶ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید:

$$f(x)=۲x+۱ \qquad , \qquad g(x)=۲x+۱ \quad (x\neq ۲) \qquad , \qquad h(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & \text{و} \quad x\neq ۲ \\ ۳ & \text{و} \quad x=۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر $f(۲)$, $h(۲)$ و $g(۲)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to ۲} h(x) \quad , \quad \lim_{x\to ۲} g(x) \quad , \quad \lim_{x\to ۲} f(x)$$

۲۷ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & \text{و} \quad x>۰ \\ -x & \text{و} \quad x<۰ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ آیا $f(۰)$ موجود است؟

۲۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & \text{و} \quad x>۰ \\ -۲x-۲ & \text{و} \quad x\leq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

۲۹ آیا حد تابع زیر در $x=۲$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

۳۰ در تابع $f(x)=\begin{cases} ۳-x\ , & x\geq ۰ \\ x^۲-۱\ , & x<۰ \end{cases}$ اختلاف حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x=۰$ بدست آورید.

۳۱ تابع $f(x)=\begin{cases} (a+۲)x-۳\ , & x>۲ \\ -x^۲+۱\ , & x\leq ۲ \end{cases}$ مفروض است، اگر تابع f در $x=۲$ دارای حد باشد، مقدار a را بدست آورید.

۳۲ اگر $f(x)=\sqrt{۸+۲x}$ باشد، $\lim\limits_{x\to(-۴)} f(x)$ را بدست آورید.

۳۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱\ , & x<-۲ \\ ۱-۲x\ , & x\geq -۲ \end{cases}$ باشد، $\lim\limits_{x\to(-۲)} f(x)$ را بدست آورید.

۳۴ اگر $f(x)=\sqrt{x-۵}$ باشد، $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ را محاسبه کنید.

۳۵ اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x\ , & x\geq ۱ \\ ۳-x^۲\ , & x<۱ \end{cases}$ باشد، $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را بدست آورید.

۳۶ آیا تابع $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=۳$ حد دارد؟

۳۷ در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۰ & , \quad x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & , \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)+\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^{-۱}} f(x)$ را بدست آورید.

۳۸ اگر $f(x)=\begin{cases} ۱\ , & x\leq ۰ \\ -۱\ , & x>۰ \end{cases}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)+f(۰)$ را بدست آورید.

محاسبهٔ حد از روی ضابطه

۳۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

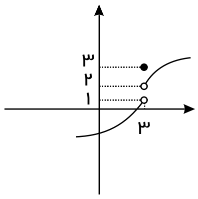
الف حد تابع $f(x)=\dfrac{x+۴}{[x]+۳}$ وقتی $x\to -۱^-$ برابر .... است.

۴۰ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف حاصل حد $\sqrt{x}$ وقتی $x\to ۰^+$ برابر .... است.

درس دوم : محاسبه ی حد توابع قضایای حد

۴۱ با توجه به شکل، حاصل عبارت روبه‌رو را تعیین کنید.



$$A = \lim_{x\to ۳^+} \sqrt{x^۲ - ۵} + \lim_{x\to ۳^-} \frac{xf(x)}{x+f(x)}$$

۴۲ در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۴۳ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۴۴ اگر تابع f در $x=۳$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۳} \frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۵$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x\to ۳} f(x)$ را بدست آورید.

۴۵ حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۲^-} (x+[x])$

ب) $\lim_{x\to ۲^+} \frac{[x]+۱}{۳x}$

پ) $\lim_{x\to ۱^-} (۳[x]-x)$

ت) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{x-[x]}{۲[x]}$

۴۶ حدهای زیر را درصورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{[x]}{x}$

ب) $\lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]-۳}{x}$

۴۷ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$، به کمک قانون حد حاصل‌ضرب هر یک از حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to a} (f(x))^۲ =$ ....

ب) $\lim_{x\to a} (f(x))^۳ =$ ....

۴۸ اگر تابع f در $x=۰$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۰} \frac{۲f(x)+۳}{۳f(x)-۲} = \frac{۲}{۵}$ باشد، مقدار $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را به دست آورید.

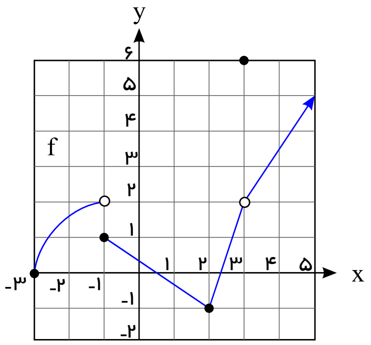
۴۹ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

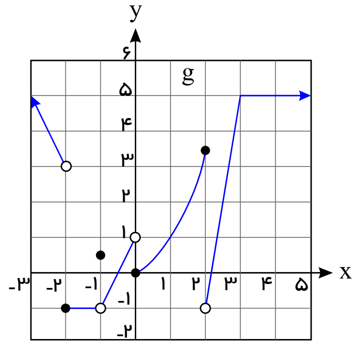
الف) $\lim_{x\to m^+} [x]$

ب) $\lim_{x\to m^-} [x]$

پ) $\lim_{x\to m} [x]$

۵۰ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+g(x))$ ث) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)+g(x))$ ج) $\lim\limits_{x\to 2}(2f(x)+5g(x))$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^4$ ح) $\lim\limits_{x\to 0}(g(x))^2$

خ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د) $\lim\limits_{x\to 5}(f(x)\cdot g(x))$

۵۱ اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=-1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+h(x))$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}(h(x))^5$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}$ ج) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{h(x)}$

۵۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)$ پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

چ) $\lim\limits_{x\to -2}[x]$ ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ خ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ ذ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+5}$ ر) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$

ز) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]+1}$ ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos x$ س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{[x]}$ ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$ ض) $\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$

۵۳ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲\cos x + ۱}{۳ - \sin x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۲\sin x \cos x}{۱ + \cos^۲ x}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sqrt{۲}(\sin x + \cos x)^۳$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin^۲ x + ۲\cos x}{۲\sin^۲ x - \cos x}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}} (۱ - \sin^۲ x) \times \tan^۲ x$

۵۴ اگر ۴ $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) = ۴$ ، $\lim\limits_{x\to(-۱)} g(x) = ۲$ باشند، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{۲f(x) - ۳g(x)}{(g(x))^۲ + ۶x^۳}$ را بدست آورید.

۵۵ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x)$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱ - \sin^۲ x}{۱ - \sin x}$

پ) $\lim\limits_{x\to (-\frac{\pi}{۲})} \dfrac{۱ - \sin^۲ x}{۱ + \sin x}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱ - \cos^۲ x}{۱ - \cos^۳ x}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}} (۳\sin x - ۱)$

ج) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{۲\sin x - ۲}{۳ + ۵\cos x}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۴\sin x \cdot \cos x$

۵۶ حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۳x - ۱}{x^۲ - ۲x + ۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)} (۲x^۲ + ۵x)(۶x - ۱)$

پ) $\lim\limits_{x\to (-۳)} \dfrac{x^۲ - |x|}{|x| + ۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)} \dfrac{|x^۲ - ۱|}{|x| + ۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۷} \dfrac{\sqrt{x + ۲}}{x - ۴}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt{۲x - ۶}}{x + ۳}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۵} (۲\sqrt{x} + ۱)(\sqrt{x + ۴} - ۱)$

ح) $\lim\limits_{x\to (-۲)} \dfrac{۲x^۲ + ۵x + ۸}{x^۲ + ۲}$

۵۷ اگر $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۳$، $\lim\limits_{x\to ۱} g(x) = -۲$، $\lim\limits_{x\to ۱} h(x) = ۰$ باشد، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} (f(x) - g(x))$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} (g(x) + h(x))$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱} (۲f(x) - h(x) + ۳g(x))$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱} (\dfrac{۵f(x)}{۲g(x) - ۴h(x)})$

۵۸ هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف

$$\lim_{x\to ۰} \frac{[x] + |x|}{x + ۱}$$

ب

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{-۳}{|[x] + [-x]|}$$

۵۹ مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۹}$$

ب

$$\lim_{x\to ۱۴۰۲^-} [x]$$

پ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \cos x$$

۶۰ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۳x - ۴}{x^۲ + x} =$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{۲x + ۳}{[x] + ۲} =$$

۶۱ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - x}$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۳ + ۱}{[x]}$$

پ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x)$$

۶۲ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲-۳x}$$

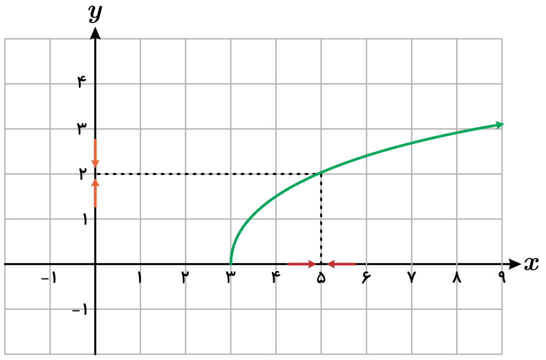
ب

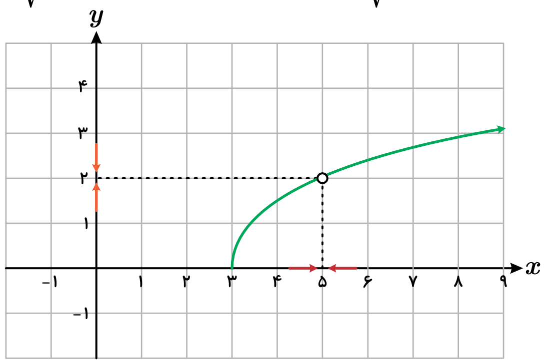
$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۳}{[x]}$$

پ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\tan x+\cot x)$$

۶۳ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ و $(x\neq ۵)$ $g(x)=\sqrt{۲x-۶}$ رسم شده‌اند.





الف هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟

پ کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=$ ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=$ پ) $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=$

۶۴ دربارهٔ تابع $h(x)=\frac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف

$h(x)=۱$

ب

$D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$

پ

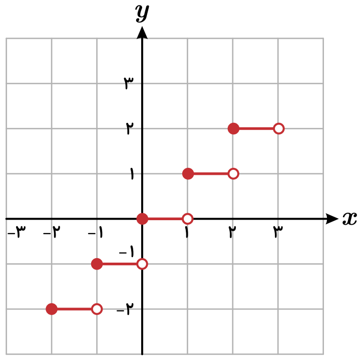
$\lim\limits_{x\to ۰^+} h(x)=۱$

ت

$h(۰)=۰$

ث $\lim\limits_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد.

۶۵ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=[x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف

$\lim\limits_{x\to 2^+}[x]$

ب

$\lim\limits_{x\to 2^-}[x]$

پ

$\lim\limits_{x\to 2}[x]$

ت

$\lim\limits_{x\to 1}[x]$

ث

$\lim\limits_{1.5}[x]$

ج

$\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}[x]$

۶۶ حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نشان‌دهندهٔ جزء صحیح است.)

الف

الف) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

ب

ب) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

پ

پ) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x-2}{[x]+1}$

۶۷ در صورت وجود حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ([] نشان دهنده جزء صحیح است.)

الف

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

ب

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{[x]+1}{\cos(-\pi x)}$

۶۸ حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

الف

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۸ - x^۳}{x^۲ + ۳x - ۱۰}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{|۲ - x|}{[x] + ۱}$$

رفع ابهام از صفر صفرم

۶۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{۲x - ۲}$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۴x^۲}{۲x^۲ - x^۳}$

پ) $\lim_{x\to (-۱)} \frac{۳x^۲ + ۵x + ۲}{۲x^۲ + x - ۱}$

ت) $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۳ - ۲۷}{x^۲ - ۲x - ۳}$

ث) $\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۳ + ۴x - ۳x^۲ - ۴}{x^۲ + x - ۲}$

۷۰ حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{۸}{۴}} \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\sqrt{۲}\sin x - \sqrt{۲}\cos x}$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos x}{\tan^۲ x}$

پ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^۲ x}{۱ - \sin x}$

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{۴\sin^۲ x - ۱}{۱ - ۲\sin x}$

۷۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to (-۳)} \frac{x^۲ - ۹}{x + ۳}$

ب) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲ + ۴x - ۵}$

پ) $\lim_{x\to (-۱)} \frac{x^۲ - ۵x - ۶}{x^۲ + ۸x + ۷}$

ت) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۳ - ۸}$

ث) $\lim_{x\to (-۲)} \frac{x^۲ + ۵x + ۶}{x^۲ + ۲x}$

۷۲ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to(-۲)} \dfrac{۲x^۲-۸}{x^۲-x-۶}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۲-x}{x^۲-۴x+۳}$

پ) $\lim\limits_{x\to(-۲)} \dfrac{x^۲+x-۲}{x^۲+۳x+۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to(-۳)} \dfrac{x^۳+۳x^۲}{x^۲-۹}$

ث) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x^۲-۱}{۸x^۲-۲x-۱}$

۷۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف مقدار $\lim[x]$ وقتی $x\to ۰$ برابر صفر است.

۷۴ a را طوری بیابید که $\dfrac{۱}{۸} = \lim\limits_{x\to ۲a} \dfrac{x-۲a}{x^۲-۴a^۲}$ باشد.

۷۵ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۷۶ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x-[x]}{x^۲-۴}$

ب

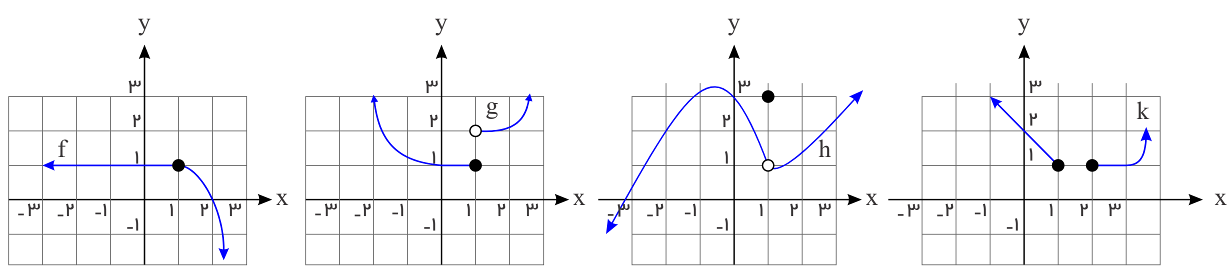
$\lim\limits_{x\to(-۱)^+} \dfrac{x^۲+[x]}{۳x^۲+۵x+۲}$

درس سوم : پیوستگی | پیوستگی در نقطه

۷۷ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=۱$ مساوی -۱ باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & , \quad x>۰ \\ a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) & , \quad x\le ۰ \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x=۰$ پیوسته است؟

۷۹ کدام‌یک از توابع زیر در $x=۱$ پیوسته است؟



۸۰ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+۲ & x\le ۰ \\ x^۲+۲ & x>۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۸۱ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲[x] & , \quad x>۱ \\ a+۳ & , \quad x=۱ \\ bx+۶ & , \quad x<۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد.

۸۲) مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطهٔ $x = ۳$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۹}{|x - ۳|}, & x < ۳ \\ x^۲ - ax , & x \geq ۳ \end{cases}$$

۸۳) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۳x + ۲} & , x \neq ۱ \\ a & , x = ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۸۴) اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+|x-۲|}{x-۱} & , x \neq ۱ \\ a & , x = ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته باشد، a را بدست آورید.

۸۵) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x}$ در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد.

۸۶) پیوستگی تابع زیر را در $x = ۰$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & x < ۰ \\ \sqrt{۲} & x = ۰ \\ x^۲ + ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

۸۷) پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = -۲$ بررسی کنید. ([] نشان‌دهندهٔ [] جزء صحیح است).

$$f(x) = \begin{cases} [x] - ۲ & x < -۲ \\ -۵ & x = -۲ \\ ۳ - ۲x^۲ & x > -۲ \end{cases}$$

۸۸) کدام یک از توابع زیر در $x = ۲$ ناپیوسته است؟

۱) $f(x) = |x - ۲|$

۲) $g(x) = \sqrt{x - ۲}$

۳) $h(x) = (x - ۲)^۲$

۴) $k(x) = ۲^x$

۸۹) پیوستگی تابع f را در نقطه $x = -۱$ بررسی کنید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است).

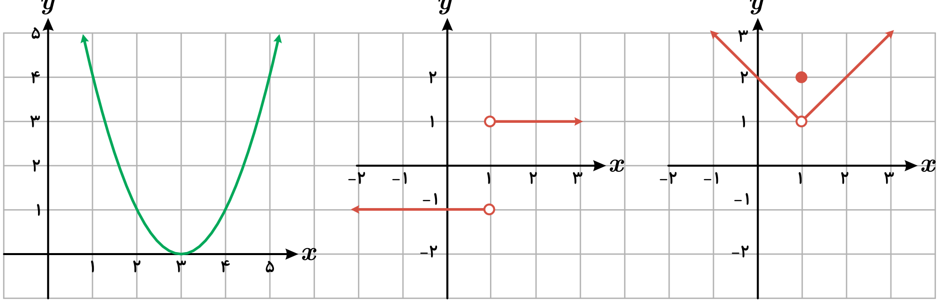
$$f(x) = \begin{cases} ۲[x] + ۱ & x < -۱ \\ -۳ & x = -۱ \\ x^۲ + ۴x & x > -۱ \end{cases}$$

۹۰) کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده‌شده در $x = ۱$ ناپیوسته‌اند؟

الف) $f(x) = (x - ۳)^۲$

ب) $g(x) = \dfrac{|x - ۱|}{x - ۱}$

پ) $h(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ -x + ۲ & x < ۱ \end{cases}$



۹۱) اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a\sin x+b\cos ۲x & x>\frac{\pi}{۲} \\ ۲ & x=\frac{\pi}{۲} \\ a\sin(۳x)+۱ & x<\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۹۲) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع روبه‌رو در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax+۲ & x>۱ \\ ۴ & x=۱ \\ \sqrt{۳x^۲+۱}-۲b & x<۱ \end{cases}$$

۹۳) با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۹۴) توابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۹}{x-۳} & \text{و} \quad x\neq ۳ \\ ۶ & \text{و} \quad x=۳ \end{cases}$ و $g(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=۳$ بررسی کنید.

۹۵) به‌ازای چه مقداری از a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{\pi}{x} \ , & ۱\leq x\leq ۶ \\ a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} \ , & ۶<x \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۶$ پیوسته است؟

۹۶) مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۲\cos x+a & , x<۰ \\ -۲ & , x=۰ \\ ۳x+۲b & , x>۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته باشد.

۹۷) مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax-۱ & , x<۲ \\ ۷ & , x=۲ \\ ۲x+۳b & , x>۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته باشد.

۹۸) در تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۳ \ , & x>۱ \\ ۵ & x=۱ \\ -۲x+b \ , & x<۱ \end{cases}$، مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x=۱$ پیوسته باشد.

۹۹) اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۳x-[x] \ , & x<۲ \\ a \ , & x=۲ \\ x+۳ \ , & x>۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۱۰۰) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sin x+۲\cos x \ , & ۰<x<\frac{\pi}{۲} \\ ۱ \ , & x=\frac{\pi}{۲} \\ -\cos x \ , & \frac{\pi}{۲}<x<\pi \end{cases}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ چه نوع پیوستگی دارد؟

۱۰۱) اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ \ , & x>۲ \\ x^۲+۱ \ , & x<۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوستگی چپ داشته باشد، $f(۲)$ را بدست آورید.

۱۰۲) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ \ , & x<۱ \\ ۲ \ , & x=۱ \\ -x+۳ \ , & x>۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ چه نوع پیوستگی دارد؟

۱۰۳) پیوستگی تابع $f(x)\begin{cases} |x+۳| \ , & x\neq -۳ \\ ۳ \ , & x=-۳ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=-۳$ بررسی کنید.

۱۰۴) با توجه به نمودار زیر، پیوستگی تابع را در نقاط خواسته شده بررسی کنید.

الف) $x=-۲$

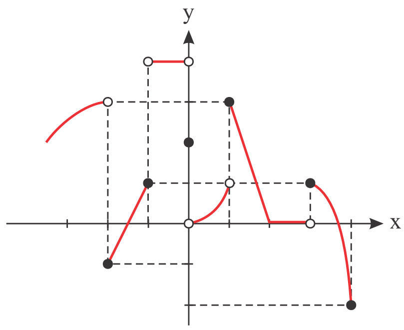
ب) $x=-۱$

پ) $x=۰$

ت) $x=۱$

ث) $x=۲$

ج) $x=۳$



۱۰۵ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف تابع $y=\sqrt{۱-x}$ در $x=۱$ پیوستگی .... دارد.

۱۰۶ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x-۵ & x<۲ \\ -۳ & x=۲ \\ x^{۲}-۷ & x>۲ \end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید.

۱۰۷

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+a & x<۰ \\ b+۱ & x=۰ \\ x^{۲}+۲ & x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

۱۰۸ اگر تابع $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ax+۳ & x<۱ \\ ۲ & x=۱ \\ x^{۲}+b & x>۱ \end{cases}$$

۱۰۹ مقادیر b و a را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & x<-۱ \\ ax+b & x=-۱ \\ x^{۲}-b & x>-۱ \end{cases}$$

۱۱۰ پیوستگی تابع زیر را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۹ & x>۲ \\ -۵ & x=۲ \\ -۲x^{۲}+۳ & x<۲ \end{cases}$$

۱۱۱ حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}-۹}=$$

۱۱۲ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۲\sqrt{x^{۲}-۶x+۹}}{x-۳} & x>۳ \\ ۲ & x=۳ \\ ۵x-۱۳ & x<۳ \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۳$ بررسی کنید. در مورد پیوستگی تابع f در سایر نقاط چه می‌توان گفت؟

پیوستگی در بازه

۱۱۳ با رسم نمودار تابع $f(x)=[x-۱]$ مشخص کنید که این تابع در چه بازه یا نقاطی پیوسته یا ناپیوسته است؟

۱۱۴ هر یک از توابع زیر در چه بازه‌ای پیوسته هستند؟

الف) $f(x)=x^{۳}-۵x$

ب) $g(x)=\sin x$

پ) $h(x)=\log x$

ت) $k(x)=\sqrt{x-۶}$

۱۱۵ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۱۱۶ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۲ax+b\,, & x>۲ \\ ۵\,, & x=۲ \\ x^{۲}+bx-a, & x<۲ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، a و b را بدست آورید.

۱۱۷ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱\ , & x<۴ \\ ۹\ , & x=۴ \\ ۳x+b\ , & x>۴ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۱۱۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & ۰\leq t<۱ \\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t\leq ۱۰ \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$۶ \text{ ماه } \to \frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \text{ سال} \qquad f(\frac{۱}{۲})=۶\times(\frac{۱}{۲})+۴=۷$$

الف) $f(۲)$ و $f(۵)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازهٔ $[۰,۱۰]$ پیوسته است؟

۱۱۹ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سوالات پاسخ دهید.

$$f(x)=۲x+۱\ ,\quad g(x)=۲x+۱\quad x\neq ۲\quad ,\ h(x)=\begin{cases} ۲+x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

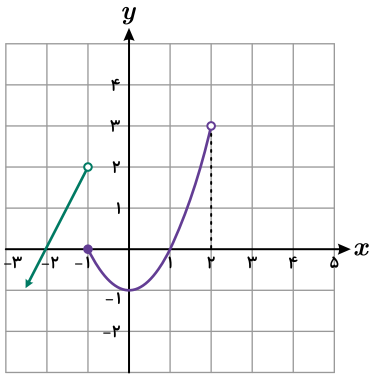
الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید: $f(۲)=\quad ,\quad g(۲)=\quad ,\quad h(۲)=$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\quad \lim\limits_{x\to ۲} g(x)=\quad \lim\limits_{x\to ۲} h(x)=$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۱۲۰ تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$



الف نمودار f را کامل کنید.

ب دامنه و برد f را به دست آورید.

پ پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.

۱۲۱ دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف f روی بازهٔ $(-\infty,-۱]$ پیوسته است.

ب f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

پ f روی بازهٔ $[۲,۵]$ پیوسته است.

ت $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$

ث $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$

ج) f روی بازهٔ $(-۲, ۰)$ پیوسته است.

۱۲۲) با توجه به تابع f:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x + ۴ & x < -۱ \\ x^۲ - ۱ & -۱ \leq x < ۲ \\ -x + ۵ & ۲ < x < ۵ \end{cases}$$

الف) دو بازهٔ بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

ب) a و bای را مثال بزنید که تابع روی (a, b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a, b]$ پیوسته نباشد.

۱۲۳) تابع $y = [x]$ بر بازهٔ $[۱, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را تعیین کنید.

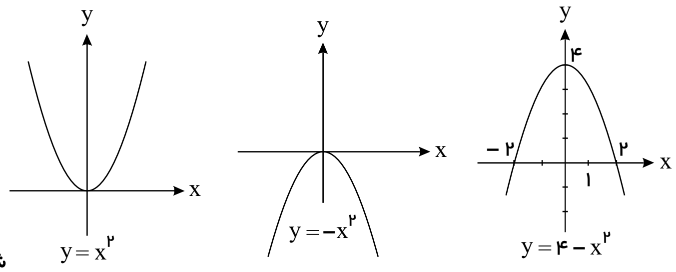
پاسخنامه تشریحی

۱

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۱,\ \lim_{x\to ۳^-} f(x) = -۲, f(۳) = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+} f(x) + \lim_{x\to ۳^-} f(x) + f(۳) = ۱ + (-۲) + ۲ = ۱$$

۲

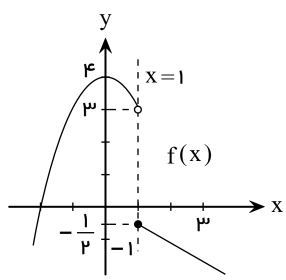
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$$



شرط وجود حد در نقطهٔ $x = ۱$ آن است که: $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x)$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$$

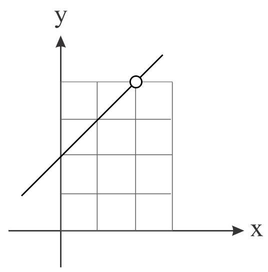
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = -\frac{۱}{۲}$$



چون حد چپ و راست برابر نیستند، تابع در نقطهٔ $x = ۱$ حد ندارد.

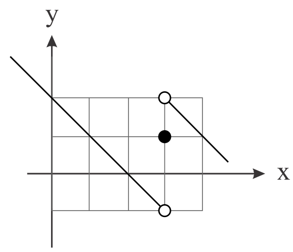
۳

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲}$$



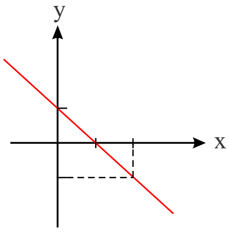
۴

$$f(x) = \begin{cases} -x + ۲ & x < ۳ \\ ۱ & x = ۳ \\ -x + ۵ & x > ۳ \end{cases}$$



۵

$f(x) = -x + 1$



۶

ب) $f(1) = 2$ درست

الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ نادرست است (زیرا $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$)

ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$ درست

پ) $f(2) = 1$ نادرست است (زیرا این حد وجود ندارد)

ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ درست

ث) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$ نادرست

ح) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ وجود ندارد درست

چ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد درست

۷ نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

پ) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$

ت) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$

ث) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = 1$

ج) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = -1$

چ) $\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x) = -1$

ح) $\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x) =$ وجود ندارد

خ) $f(-3) = -1$

د) $f(2) = 1$

ذ) $f(3) = 2$

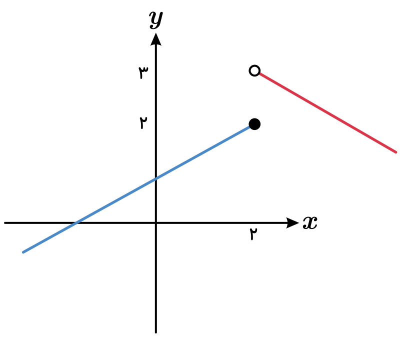
ر) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

ز) $\lim\limits_{x\to (-2)} f(x) = -1$

۸

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$

۹



۱۰

الف) ۳

ب)

$$\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} f(x) = 2 + 4 = 6$$

۱۱

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $f(۲) = ۰$

۱۲

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۴,\ \lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۳,\ f(۱) = ۲$$
$$\to \lim_{x\to ۱^+} f(x) - ۴\lim_{x\to ۰^-} f(x) + ۲f(۱) = ۴ - ۴(۳) + ۲(۲) = -۴$$

۱۳

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۲,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = -۱,\ f(۲) = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x) + \lim_{x\to ۲^-} f(x) + f(۲) = ۲ + (-۱) + ۳ = ۴$$

۱۴

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳,\ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x) - \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = ۳ - ۱ = ۲$$

۱۵

الف درست

ب درست

پ نادرست؛ چون مقادیر حد چپ و حد راست در نقطهٔ با هم برابر نیستند، لذا تابع در این نقطه حد ندارد، یعنی:

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x) =$ حد ندارد

ت نادرست؛ چون تابع به ازای مقادیر بزرگ‌تر از -۲ (یعنی $(-۲)^+$) تعریف نشده است، پس تابع در این نقطه حد ندارد.

۱۶

الف ۱

ب ۴

پ صفر

۱۷

الف الف) وجود ندارد.

ب) ۱

ب خیر

۱۸ الف) صفر

ب) ۲

ج) -۱

۱۹

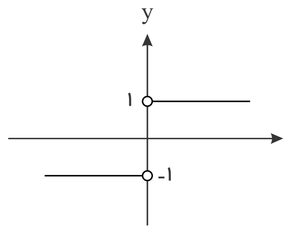
$$۳ - ۳(-۱) + ۳(۱) = ۹$$

۲۰

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (ax + b) = a(۲) + b = ۲a + b = ۵$$
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (ax^۲ + ۳bx + ۱) = a(۲)^۲ + ۳b(۲) + ۱ = ۴a + ۶b + ۱ = ۷$$
$$\to \begin{cases} ۲a + b = ۵ \\ ۴a + ۶b = ۶ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a + b = ۵ \\ ۲a + ۳b = ۳ \end{cases} \to \begin{cases} -\cancel{۲a} - b = -۵ \\ \cancel{۲a} + ۳b = ۳ \end{cases}$$
$$۲b = -۲ \to \boxed{b = -۱}$$
$$\to ۲a - ۱ = ۵ \to ۲a = ۶ \to \boxed{a = ۳} \to \boxed{a + b = ۲}$$

۲۱

$$f(x)=\frac{|x|}{x}\rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & ,\quad x>۰\\ -۱ & ,\quad x<۰\end{cases}$$



$$\lim_{x\to ۰} f(x)= \text{وجود ندارد}$$

۲۲

$$\lim_{x\to(-۱)} f(x)=\lim_{x\to(-۱)}(a-۱)x+۵=(a-۱)(-۱)+۵=-a+۶\rightarrow -a+۶=۲\rightarrow \boxed{a=۴}$$

$$\lim_{x\to(-۴)} f(x)=\lim_{x\to(-۴)} x^۲+۲b=(-۴)^۲+۲b=۱۶+۲b\rightarrow ۱۶+۲b=۸\rightarrow ۲b=-۸\rightarrow \boxed{b=-۴}$$

۲۳

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} x^۲+۲a=(۱)^۲+۲a=۱+۲a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} ax-۱=a(۱)-۱=a-۱$$

$$\rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱\rightarrow (۱+۲a)-(a-۱)=-۱\rightarrow ۲+a=-۱\rightarrow \boxed{a=-۳}$$

۲۴

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x-a)=۱-a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x^۲+۲a)=(۱)^۲+۲a=۱+۲a$$

$$\rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱^-} f(x)\rightarrow ۱-a=\frac{۱}{۲}(۱+۲a)\rightarrow ۲-۲a=۱+۲a\rightarrow ۱=۴a\rightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۴}}$$

۲۵ f یک تابع دوضابطه‌ای است. مقدار حد چپ تابع f در $x=۱$ را از ضابطهٔ $f(x)=۲x+a$ و مقدار حد راست تابع f در $x=۱$ را از ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۲}{x+۱}$ به دست می‌آوریم.

$$x\to ۱^-\Rightarrow x<۱\Rightarrow f(x)=۲x+a\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x+a)=۲+a \quad (۱)$$

$$x\to ۱^+\Rightarrow x>۱\Rightarrow f(x)=\frac{ax+۲}{x+۱}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{ax+۲}{x+۱}=\frac{a+۲}{۲} \quad (۲)$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)-\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳\xrightarrow{(۱),(۲)}(a+۲)-(\frac{a+۲}{۲})=۳$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲(a+۲)-(a+۲)=۶\Rightarrow a+۲=۶\Rightarrow a=۴$$

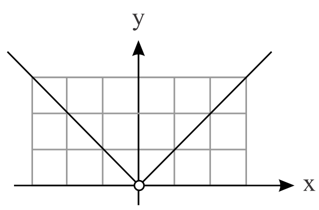
۲۶

الف) $f(۲)=۵$, $h(۲)=۳$, $g(۲)=$ وجود ندارد

ب) $\lim_{x\to ۲} f(x)=۵$, $\lim_{x\to ۲} h(x)=۵$, $\lim_{x\to ۲} g(x)=۵$

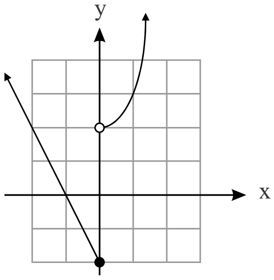
۲۷

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰\,,\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=۰$$



$$f(۰)= \text{وجود ندارد}$$

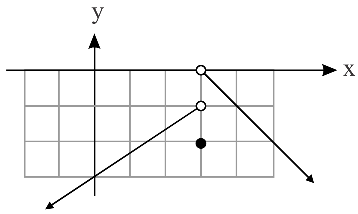
۲۸



$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۲\ ,\ \lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۲۹

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم و داریم:



$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۰\ ,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۳۰

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} (۳ - x) = ۳ - ۰ = ۳$$
$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (x^۲ - ۱) = (۰)^۲ - ۱ = -۱$$
$$|\text{حد راست} - \text{حد چپ}| = |۳ - (-۱)| = ۴$$

۳۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (a+۲)x - ۳ = (a+۲)(۲) - ۳ = ۲a + ۱$$
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (-x^۲ + ۱) = -(۲)^۲ + ۱ = -۴ + ۱ = -۳$$
$$\to \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) \to ۲a + ۱ = -۳ \to ۲a = -۴ \to \boxed{a = -۲}$$

۳۲

$$۸ + ۲x \geq ۰ \to ۲x \geq -۸ \to x \geq -۴ \to D_f = [-۴, +\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to(-۴)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۴)^+} \sqrt{۸ + ۲x} = ۰ \\ \lim_{x\to(-۴)^-} = \lim_{x\to(-۴)^-} \sqrt{۸ + ۲x} = \text{وجود ندارد}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to(-۴)} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۳۳

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} (۱ - ۲x) = ۱ - ۲(-۲) = ۱ + ۴ = ۵$$
$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} (x^۲ - ۱) = (-۲)^۲ - ۱ = ۴ - ۱ = ۳$$
$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) \neq \lim_{x\to(-۲)^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to(-۲)} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۳۴

$$x - ۵ \geq ۰ \to x \geq ۵ \to D_f = [۵, +\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۵^+} f(x) = \lim_{x\to ۵^+} \sqrt{x - ۵} = ۰ \\ \lim_{x\to ۵^-} f(x) = \lim_{x\to ۵^-} \sqrt{x - ۵} = \text{وجود ندارد}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۵} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۳۵

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} ۲x = ۲(۱) = ۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۳ - x^۲) = ۳ - (۱)^۲ = ۲\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ۲$$

۳۶

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} [۳^+] = ۳, \lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} [x] = [۳^-] = ۲$$

$\to \lim_{x\to ۳^+} f(x) \neq \lim_{x\to ۳^-} f(x) \to$ تابع $f(x)$ در $x = ۳$ حد ندارد

۳۷

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = -۱ \ , \ \lim_{x\to (\frac{۱}{۲})^-} = -۱ \to \lim_{x\to ۰^+} f(x) + \lim_{x\to (\frac{۱}{۲})^-} f(x) = -۱ + (-۱) = -۲$$

۳۸

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = -۱ \ , \ \lim_{x\to ۰^-} = ۱ \ , f(۰) = ۱ \to \lim_{x\to ۰^+} f(x) + \lim_{x\to ۰^-} f(x) + f(۰) = -۱ + ۱ + ۱ = ۱$$

۳۹

الف ۳

۴۰

الف صفر

۴۱

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۲ \ , \ \lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۱$$

$$A = \lim_{x\to ۳^+} \sqrt{x^۲ - ۵} + \lim_{x\to ۳^-} \frac{xf(x)}{x + f(x)}$$

$$A = \sqrt{\lim_{x\to ۳^+} (x^۲ - ۵)} + \frac{\lim_{x\to ۳^-} xf(x)}{\lim_{x\to ۳^-} (x + f(x))}$$

$$A = \sqrt{۳^۲ - ۵} + \frac{\lim_{x\to ۳^-} x \times \lim_{x\to ۳^-} f(x)}{\lim_{x\to ۳^-} x + \lim_{x\to ۳^-} f(x)}$$

$$A = ۲ + \frac{۳ \times ۱}{۳ + ۱} = ۲ + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۱}{۴}$$

۴۲ الف – دقیقا نمی‌توان گفت که $f + g$ در $x = a$ حد دارد یا ندارد.

ب – حد تابع $f + g$ در $x = a$ وجود ندارد.

۴۳

$$f(x) = x + ۳ \to \lim_{x\to ۱} f(x) = ۴$$

$$g(x) = ۵x - ۱ \to \lim_{x\to ۱} g(x) = ۴$$

۴۴

$$\lim_{x\to ۳} \frac{۲f(x) - ۱}{f(x) + ۱} = \frac{\lim_{x\to ۳} (۲f(x) - ۱)}{\lim_{x\to ۳} (f(x) + ۱)} = \frac{۲\lim_{x\to ۳} f(x) - ۱}{\lim_{x\to ۳} f(x) + ۱} = ۵$$

$$\to ۲\lim_{x\to ۳} f(x) - ۱ = ۵\lim_{x\to ۳} f(x) + ۵ \to -۶ = ۳\lim_{x\to ۳} f(x) \to \lim_{x\to ۳} f(x) = -۲$$

۴۵

الف) $\lim_{x\to ۲^-} (x + [x]) = \lim_{x\to ۲^-} x + \lim_{x\to ۲^-} [x] = ۲ + [۲^-] = ۲ + ۱ = ۳$

ب) $\lim_{x\to ۲^+} \frac{[x]+۱}{۳x} = \frac{\lim_{x\to ۲^+}[x]+۱}{\lim_{x\to ۲^+} ۳x} = \frac{[۲^+]+۱}{۳(۲)} = \frac{۲+۱}{۶} = \frac{۱}{۲}$

پ) $\lim_{x\to ۱^-} (۳[x]-x) = \lim_{x\to ۱^-} ۳[x] - \lim_{x\to ۱^-} x = ۳[۱^-]-۱ = ۳(۰)-۱ = -۱$

ت) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{x-[x]}{۲[x]} = \frac{\lim_{x\to ۳^-} x-[x]}{\lim_{x\to ۳^-} ۲[x]} = \frac{۳-[۳^-]}{۲[۳^-]} = \frac{۳-۲}{۲(۲)} = \frac{۱}{۴}$

۴۶

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{[x]}{x} \begin{cases} \lim_{x\to ۲^-} \frac{[x]}{x} = \frac{[۲^-]}{۲} = \frac{۱}{۲} \\ \lim_{x\to ۲^+} \frac{[x]}{x} = \frac{[۲^+]}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ \end{cases}$

چون حد چپ و راست در $x=۲$ با هم برابر نیست، پس حد فوق وجود ندارد.

ب) $\lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]-۳}{x} = \frac{[۱^+]-۳}{۱} = \frac{۱-۳}{۱} = -۲$

۴۷

الف) $\lim_{x\to a}(f(x))^۲ = \lim_{x\to a}(f(x)\cdot f(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} f(x) = l\cdot l = l^۲$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x))^۳ = \lim_{x\to a}(f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} f(x) = l\cdot l\cdot l = l^۳$

۴۸ فرض کنیم $\lim_{x\to ۰} f(x) = A$ باشد، در این صورت بنابر قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲f(x)+۳}{۳f(x)-۲} = \frac{۲\lim_{x\to ۰} f(x)+۳}{۳\lim_{x\to ۰} f(x)-۲} = \frac{۲A+۳}{۳A-۲} = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۲(۳A-۲) = ۵(۲A+۳) \Rightarrow ۶A-۴ = ۱۰A+۱۵$$

$$\Rightarrow ۱۰A-۶A = -۴-۱۵ \Rightarrow ۴A = -۱۹ \Rightarrow A = \frac{-۱۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x) = -\frac{۱۹}{۴}$$

۴۹

الف) $\lim_{x\to m^+} [x] = m$

ب) $\lim_{x\to m^-} [x] = m-۱$

پ) $\lim_{x\to m} [x] =$ وجود ندارد

۵۰

الف) $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۲$ ب) $\lim_{x\to -۱} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x\to ۳} g(x) = ۵$ ت) $\lim_{x\to ۳} (f(x)+g(x)) = ۲+۵ = ۷$

ث) $\lim_{x\to -۱} (f(x)+g(x)) =$ وجود ندارد $+(-۱) =$ وجود ندارد

ج) $\lim_{x\to ۲} (۲f(x)+۵g(x)) = ۲\lim_{x\to ۲} f(x) + ۵\lim_{x\to ۲} g(x) = ۲(-۱)+۵($وجود ندارد$) =$ وجود ندارد

چ) $\lim_{x\to 0} (f(x))^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

ح) $\lim_{x\to 0} (g(x))^2 =$ وجود ندارد

خ) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{\text{وجود ندارد}} =$ وجود ندارد

د) $\lim_{x\to 5} (f(x)\cdot g(x)) = 5\times 5 = 25$

۵۱

الف) $\lim_{x\to 2} (f(x)+h(x)) = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} h(x) = 3 + (-1) = 2$

ب) $\lim_{x\to 2} (h(x))^5 = (\lim_{x\to 2} h(x))^5 = (-1)^5 = -1$

پ) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{3}{0} =$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)} = \frac{0}{3} = 0$

ث) $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)}{g(x)-5h(x)} = \frac{3\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x) - 5\lim_{x\to 2} h(x)} = \frac{3\times 3}{0-5\times(-1)} = \frac{9}{0+5} = \frac{9}{5}$

ج) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 2} h(x)} = \frac{1}{-1} = -1$

۵۲

الف) $\lim_{x\to 7} (-3) = 3$

ب) $\lim_{x\to 0} (-2x-7) = -2(0) - 7 = 0 - 7 = -7$

پ) $\lim_{x\to -1} (3x^2 - 4x + 5) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

ت) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{3^2-3(3)}{3^2-9} = \frac{0}{0}$

ث) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2x^2-x} = \frac{0}{2(0)^2-0} = \frac{0}{0}$

ج) $\lim_{x\to (-2)} \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(-2)^3+8}{-2+2} = \frac{0}{0}$

چ) $\lim_{x\to -2} [x] =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x\to(-2)^+} [x] = [(-2)^+] = -2 \\ \lim_{x\to(-2)^-} [x] = [(-2)^-] = -3 \end{cases}$

ح) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$

خ) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+7} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

د) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = \sqrt{0^-} =$ وجود ندارد

د) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x+۵} = \sqrt{۲+۵} = \sqrt{۷}$

ر) $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x-۲} = \sqrt{۱-۲} = \sqrt{-۱}$ وجود ندارد

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{x-۲}{[x]+۱} = \dfrac{۳^+-۲}{[۳^+]+۱} = \dfrac{۳-۲}{۳+۱} = \dfrac{۱}{۴}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}} \cos x = \cos(-\dfrac{\pi}{۳}) = \cos(\dfrac{\pi}{۳}) = \dfrac{۱}{۲}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x) = \sin\dfrac{\pi}{۴} + \cos\dfrac{\pi}{۴} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} + \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \dfrac{x}{[x]} = \dfrac{(-۲)^+}{[(-۲)^+]} = \dfrac{-۲}{-۲} = ۱$

ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x} = \dfrac{۱-(۱)^۲}{۱-۱} = \dfrac{۰}{۰}$

ض) $\lim\limits_{x\to ۰} (x+[x]) =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} (x+[x]) = ۰^+ + [۰^+] = ۰+۰ = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} (x+[x]) = ۰^- + [۰^-] = ۰ + (-۱) = -۱ \end{cases}$

۵۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲\cos x + ۱}{۳-\sin x} = \dfrac{۲(۱)+۱}{۳-۰} = \dfrac{۳}{۳} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۲\sin x \cos x}{۱+\cos^۲ x} = \dfrac{۲\times ۱ \times ۰}{۱+(۰)^۲} = \dfrac{۰}{۱} = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sqrt{۲}(\sin x + \cos x)^۳ = \sqrt{۲}(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} + \dfrac{\sqrt{۲}}{۲})^۳ = \sqrt{۲}(\sqrt{۲})^۳ = \sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲} = ۴$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin^۲ x + ۲\cos x}{۲\sin^۲ x - \cos x} = \dfrac{(۱)^۲ + ۲(۰)}{۲(۱)^۲ - (۰)} = \dfrac{۱+۰}{۲-۰} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}} (۱-\sin^۲ x)\times \tan^۲ x = (۱-(\dfrac{۱}{۲}))\times(\dfrac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ = (۱-\dfrac{۱}{۴})\times\dfrac{۳}{۹} = \dfrac{۳}{۴}\times\dfrac{۱}{۳} = \dfrac{۱}{۴}$

۵۴

$\lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{۲f(x)-۳g(x)}{(g(x))^۲+۶x^۳} = \dfrac{۲(۴)-۳(۲)}{(۲)^۲+۶(-۱)^۳} = \dfrac{۸-۶}{۴-۶} = \dfrac{۲}{-۲} = -۱$

۵۵

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x + \cos x) = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} + \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = \dfrac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x} = \dfrac{۱-(۱)^۲}{۱-۱} = \dfrac{۰}{۰}$

$\to \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} (۱+\sin x) = ۱+۱ = ۲$

پ) $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{۲})} \dfrac{۱-\sin^۲ x}{۱+\sin x} = \dfrac{۱-(-۱)^۲}{۱+(-۱)} = \dfrac{۰}{۰}$

$$\rightarrow \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)} = \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})} (1-\sin x) = 1-(-1) = 2$$

ت) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos^3 x} = \frac{1-(1)^2}{1-(1)^3} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x} = \frac{1+1}{1+1+(1)^2} = \frac{2}{3}$$

ث) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} (3\sin x - 1) = 3(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{x\to\pi} \frac{2\sin x - 2}{3+5\cos x} = \frac{2(0)-2}{3+5(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 4\sin x \cdot \cos x = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

۵۶

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{x^2-2x+4} = \frac{\lim_{x\to 1}(3x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2-2x+4)} = \frac{3(1)-1}{(1)^2-2(1)+4} = \frac{2}{3}$

ب) $\lim_{x\to(-1)} (2x^2+5x)(6x-1) = \lim_{x\to(-1)} (2x^2+5x) \times \lim_{x\to(-1)} (6x-1)$

$$= (2(-1)^2+5(-1)) \times (6(-1)-1) = (2-5)\times(-7) = (-3)\times(-7) = 21$$

پ) $\lim_{x\to(-3)} \frac{x^2-|x|}{|x|+1} = \frac{\lim_{x\to(-3)} x^2-|x|}{\lim_{x\to(-3)} |x|+1} = \frac{(-3)^2-|-3|}{|-3|+1} = \frac{9-3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

ت) $\lim_{x\to(-2)} \frac{|x^2-1|}{|x|+4} = \frac{\lim_{x\to(-2)} |x^2-1|}{\lim_{x\to(-2)} |x|+4} = \frac{|(-2)^2-1|}{|-2|+4} = \frac{3}{2+4} = \frac{1}{2}$

ث) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} = \frac{\lim_{x\to 7}\sqrt{x+2}}{\lim_{x\to 7}(x-4)} = \frac{\sqrt{7+2}}{7-4} = \frac{3}{3} = 1$

ج) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3} = \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-6}}{\lim_{x\to 1} x+3} = \frac{\sqrt{2(1)-6}}{1+3} = \frac{\sqrt{-4}}{4} =$ حد وجود ندارد

چ) $\lim_{x\to 5} (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+4}-1) = \lim_{x\to 5} (2\sqrt{x}+1) \times \lim_{x\to 5} (\sqrt{x+4}-1)$

$$= (2\sqrt{5}+1)(\sqrt{9}-1) = (2\sqrt{5}+1)(2) = 4\sqrt{5}+2$$

ح) $\lim_{x\to(-2)} \frac{2x^2+5x+8}{x^2+2} = \frac{\lim_{x\to(-2)} (2x^2+5x+8)}{\lim_{x\to(-2)} (x^2+2)} = \frac{2(-2)^2+5(-2)+8}{(-2)^2+2}$

$$= \frac{8-10+8}{4+2} = \frac{6}{6} = 1$$

۵۷

الف) $\lim_{x\to 1} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x) = 3-(-2) = 5$

$$\text{ب)} \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to ۱} f(x)}{\lim_{x\to ۱} g(x)} = \frac{۳}{-۲} = -\frac{۳}{۲}$$

$$\text{پ)} \lim_{x\to ۱} (g(x)+h(x)) = \lim_{x\to ۱} g(x) + \lim_{x\to ۱} h(x) = -۲ + ۰ = -۲$$

$$\text{ت)} \lim_{x\to ۱} (۲f(x) - h(x) + ۳g(x)) = \lim_{x\to ۱} ۲f(x) - \lim_{x\to ۱} h(x) + \lim_{x\to ۱} ۳g(x)$$

$$= ۲(۳) - ۰ + ۳(-۲) = ۶ - ۰ - ۶ = ۰$$

$$\text{ث)} \lim_{x\to ۱} \left(\frac{۵f(x)}{۲g(x) - ۴h(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to ۱} ۵f(x)}{\lim_{x\to ۱} ۲g(x) - \lim_{x\to ۱} ۴h(x)} = \frac{۵\times ۳}{۲(-۲) - ۴(۰)} = \frac{۱۵}{-۴} = -\frac{۱۵}{۴}$$

۵۸

الف

$$x \to ۰^+ : x > ۰ \to [x] = ۰, x \to ۰^- : x < ۰ \to [x] = -۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۰^+} \frac{[x]+|x|}{x+۱} = \frac{۰+۰}{۰+۱} = ۰ \\ \lim_{x\to ۰^-} \frac{[x]+|x|}{x+۱} = \frac{-۱+۰}{۰+۱} = -۱ \end{array}\right\} \to \text{حد ندارد.}$$

ب

$$x \to ۰^- : x < ۰ \to [x] = -۱$$

$$x \to ۰^- : x < ۰ \xrightarrow{\times -۱} -x > ۰ \to [-x] = ۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{-۳}{|[x] + [-x]|} = \frac{-۳}{|-۱+۰|} = -۳$$

۵۹

الف

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{x(x-۳)}{(x+۳)(x-۳)} = \frac{۳}{۳+۳} = \frac{۱}{۲}$$

ب

۱۴۰۱

پ

$$\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۰

الف

$$\lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(x-۴)}{x(x+۱)} = \lim_{x\to -۱} \frac{x-۴}{x} = \frac{-۵}{-۱} = ۵$$

ب

$$\frac{۲(-۲)+۳}{-۳+۲} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

۶۱ الف

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)}=۲$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲^۳+۱}{[۲^+]}=\frac{۹}{۲}$$

پ

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

۶۲

الف

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲-۳x}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x(x-۳)}=۲$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۳}{[x]}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲+۳}{[۲^-]}=\frac{۵}{۱}=۵$$

پ

$$۱+۱=۲$$

۶۳

الف نمودار سمت چپ مربوط به تابع f و نمودار سمت راست مربوط به تابع g است.

ب بله

$$\lim_{x\to ۵}f(x)=\lim_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}=\sqrt{۱۰-۶}=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۵}g(x)=\lim_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}=\sqrt{۱۰-۶}=۲$$

پ

الف) $\lim_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=۰$ ب) $\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=$ موجود نیست پ) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=$ موجود نیست

۶۴

الف نادرست، چون اگر $x<۰$، آنگاه $h(x)=-۱$ است.

ب درست، طبق دامنهٔ توابع گویا، ریشهٔ مخرج در دامنه موجود نیست.

پ درست، $\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=\frac{+x}{x}=+۱$

ت نادرست، تابع در صفر تعریف نشده است. زیرا: $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$

ث درست، حد چپ و راست برابر نیستند.

$$\lim_{x\to ۰^+}h(x)=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-}h(x)=-۱$$

۶۵

الف

$$\lim_{x\to ۲^+}[x]=[۲^+]=۲$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^-}[x]=[۲^-]=۱$$

پ موجود نیست.

ت

$$\lim_{x\to ۱}[x] : \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=[۱^+]=۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=[۱^-]=۰ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱}[x]$$ وجود ندارد

ث

$$\lim_{x\to ۱/۵}[x]=[۱/۵]=۱$$

ج

$$\lim_{x\to -\sqrt{۲}}[x]=[-\sqrt{۲}]=-۲$$

۶۶

الف

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{x+۲}=۴+۴+۴=۱۲$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)}{x-۲}=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱ \rightarrow$$ حد وجود ندارد

پ

$$\frac{۰-۲}{[\pi]+۱}=\frac{-۲}{۳+۱}=\frac{-۱}{۲}$$

۶۷

الف

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}=\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}}=\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۱)}{(x+۲)}=\frac{۱}{۴}}$$

ب

$$\lim_{x\to -۱^-}\frac{[x]+۱}{\cos(-\pi x)}=\underbrace{\lim_{x\to -۱^-}\frac{-۲+۱}{-۱}=۱}$$

۶۸

الف

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(۲-x)(۴+۲x+x^۲)}{(x-۲)(x+۵)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴+۲x+x^۲}{-(x+۵)}=-\frac{۱۲}{۷}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{|۲-x|}{[x]+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۶۹

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{۲x-۲}=\dfrac{(۱)^۲-۳(۱)+۲}{۲(۱)-۲}=\dfrac{۰}{۰}$

$$\rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۲}{۲}=\frac{۱-۲}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۴x^۲}{۲x^۲-x^۳}=\dfrac{۴(۰)^۲}{۲(۰)^۲-(۰)^۳}=\dfrac{۰}{۰}$

$$\rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{۴x^۲}{x^۲(۲-x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴}{۲-x}=\frac{۴}{۲-۰}=\frac{۴}{۲}=۲$$

پ) $\lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{۳x^۲+۵x+۲}{۲x^۲+x-۱} = \dfrac{۳(-۱)^۲+۵(-۱)+۲}{۲(-۱)^۲+(-۱)-۱} = \dfrac{۰}{۰}$

$\to \lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{(x+۱)(۳x+۲)}{(x+۱)(۲x-۱)} = \lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{۳x+۲}{۲x-۱} = \dfrac{۳(-۱)+۲}{۲(-۱)-۱} = \dfrac{-۱}{-۳} = \dfrac{۱}{۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to۳} \dfrac{x^۳-۲۷}{x^۲-۲x-۳} = \dfrac{(۳)^۳-۲۷}{۳^۳-۲(۳)-۳} = \dfrac{۰}{۰}$

$\to \lim\limits_{x\to۳} \dfrac{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}{(x-۳)(x+۱)} = \lim\limits_{x\to۳} \dfrac{(x^۲+۳x+۹)}{(x+۱)} = \dfrac{۳^۲+۳(۳)+۹}{۳+۱} = \dfrac{۲۷}{۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to۱} \dfrac{۳x^۳+۴x-۳x^۲-۴}{x^۲+x-۲} = \dfrac{۳(۱)^۳+۴(۱)-۳(۱)^۲-۴}{(۱)^۲+۱-۲} = \dfrac{۰}{۰}$

$\to \lim\limits_{x\to۱} \dfrac{۳x^۲(x-۱)+۴(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)} = \lim\limits_{x\to۱} \dfrac{(x-۱)(۳x^۲+۴)}{(x-۱)(x+۲)} = \lim\limits_{x\to۱} \dfrac{۳x^۲+۴}{x+۲} = \dfrac{۳(۱)^۲+۴}{۱+۲} = \dfrac{۷}{۳}$

۷۰

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۸}{۴}} \dfrac{\cos^۲x-\sin^۲x}{\sqrt{۲}\sin x-\sqrt{۲}\cos x} = \dfrac{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \dfrac{۰}{۰} \to$

$\to \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{(cosx-sinx)(cosx+sinx)}{-\sqrt{۲}(\cos x-\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos x+\sin x}{-\sqrt{۲}} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\sqrt{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}} = -۱$

ب) $\lim\limits_{x\to۰} \dfrac{۱-\cos x}{\tan^۲x} = \dfrac{۱-۱}{(۰)^۲} = \dfrac{۰}{۰} \to \lim\limits_{x\to۰} \dfrac{۱-\cos x}{\tan^۲x} = \lim\limits_{x\to۰} \dfrac{۱-\cos x}{\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}$

$\lim\limits_{x\to۰} \dfrac{(۱-\cos)\cos^۲x}{\sin^۲x} = \lim\limits_{x\to۰} \dfrac{(۱-\cos x)cos^۲x}{۱-\cos^۲x}$

$= \lim\limits_{x\to۰} \dfrac{(۱-\cos x)\cos^۲x}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)} = \lim\limits_{x\to۰} \dfrac{\cos^۲x}{۱+\cos x} = \dfrac{(۱)^۲}{۱+۱} = \dfrac{۱}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{\cos^۲x}{۱-\sin x} = \dfrac{(۰)^۲}{۱-۱} = \dfrac{۰}{۰} \to \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{\cos^۲x}{۱-\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin^۲x}{۱-\sin x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} (۱+\sin x) = ۱+۱ = ۲$

ت) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{۴\sin^۲x-۱}{۱-۲\sin x} = \dfrac{۴(\frac{۱}{۲})^۲-۱}{۱-۲(\frac{۱}{۲})} = \dfrac{۰}{۰} \to \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{۴\sin^۲x-۱}{۱-۲\sin x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{(۲\sin x-۱)(۲\sin x+۱)}{-(۲\sin x-۱)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{۲\sin x+۱}{-۱} = \dfrac{۲(\frac{۱}{۲})+۱}{-۱} = \dfrac{۲}{-۱} = -۲$

۷۱

الف) $\lim\limits_{x\to(-۳)} \dfrac{x^۲-۹}{x+۳} = \dfrac{(-۳)^۲-۹}{-۳+۳} = \dfrac{۰}{۰}$

$\to \lim\limits_{x\to(-۳)} \dfrac{(x-۳)(x+۳)}{(x+۳)} = \lim\limits_{x\to(-۳)} (x-۳) = -۳-۳ = -۶$

ب) $\lim\limits_{x\to۱} \dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲+۴x-۵} = \dfrac{(۱)^۲-۴(۱)+۳}{(۱)^۲+۴(۱)-۵} = \dfrac{۰}{۰}$

$$\rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+5}=\frac{1-3}{1+5}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

پ) $$\lim_{x\to(-1)}\frac{x^2-5x-6}{x^2+8x+7}=\frac{(-1)^2-5(-1)-6}{(-1)^2+8(-1)+7}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to(-1)}\frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x+7)}=\lim_{x\to(-1)}\frac{x-6}{x+7}=\frac{-1-6}{-1+7}=\frac{-7}{6}$$

ت) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}=\frac{(2)^2-2-2}{(2)^3-8}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=\frac{2+1}{2^2+2(2)+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

ث) $$\lim_{x\to(-2)}\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}=\frac{(-2)^2+5(-2)+6}{(-2)^2+2(-2)}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to(-2)}\frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to(-2)}\frac{x+3}{x}=\frac{-2+3}{-2}=-\frac{1}{2}$$

۷۲

الف) $$\lim_{x\to(-2)}\frac{2x^2-8}{x^2-x-6}=\frac{2(-2)^2-8}{(-2)^2-(-2)-6}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to(-2)}\frac{2(x^2-4)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to(-2)}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to(-2)}\frac{2(x-2)}{(x-3)}=\frac{2(-2-2)}{-2-3}=\frac{-8}{-5}=\frac{8}{5}$$

ب) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-4x+3}=\frac{(1)^2-1}{(1)^2-4(1)+3}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-3}=\frac{1}{1-3}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

پ) $$\lim_{x\to(-2)}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2+3(-2)+2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to(-2)}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to(-2)}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2-1}{-2+1}=\frac{-3}{-1}=3$$

ت) $$\lim_{x\to(-3)}\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}=\frac{(-3)^3+3(-3)^2}{(-3)^2-9}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to(-3)}\frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to(-3)}\frac{x^2}{x-3}=\frac{(-3)^2}{-3-3}=\frac{9}{-6}=-\frac{3}{2}$$

ث) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{8x^2-2x-1}=\frac{4(\frac{1}{2})^2-1}{8(\frac{1}{2})^2-2(\frac{1}{2})-1}=\frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{4x+1}=\frac{2(\frac{1}{2})+1}{4(\frac{1}{2})+1}=\frac{2}{3}$$

۷۳

الف) نادرست

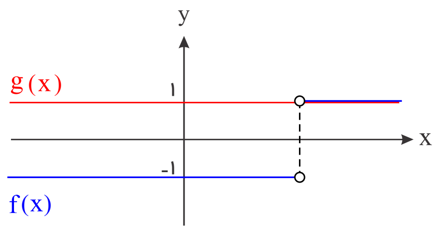
۷۴

$$\lim_{x\to ۲a}\frac{x-۲a}{x^۲-۴a^۲}=\lim_{x\to ۲a}\frac{\cancel{(x-۲a)}}{\cancel{(x-۲a)}\,(x+۲a)}=\lim_{x\to ۲a}\frac{۱}{x+۲a}=\frac{۱}{۲a+۲a}=\frac{۱}{۴a}$$

فرض : $\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow ۴a=۸\Rightarrow a=۲$

۷۵

$$f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}\quad , \quad g(x)=۱$$



$\lim_{x\to ۳} f(x)=$ وجود ندارد

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=۱$$

در نقاط $x>۳$ حد دو تابع با هم برابرند.

۷۶

الف

$$x\to ۲^+\Rightarrow x>۲\Rightarrow [x]=۲$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}\,(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

ب

$$x\to(-۱)^+\Rightarrow x>-۱\xrightarrow{\text{بین صفر و } -۱ \text{ است.}\ x}[x]=-۱$$

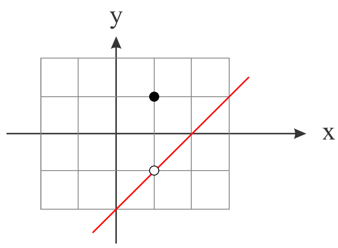
تجزیهٔ عبارت $۳x^۲+۵x+۲$ به‌صورت $(x+۱)(۳x+۲)$ است.

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۱}{۳x^۲+۵x+۲}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{(x-۱)\,\cancel{(x+۱)}}{\cancel{(x+۱)}\,(۳x+۲)}$$

$$=\frac{-۱-۱}{۳(-۱)+۲}=\frac{-۲}{-۱}=۲$$

۷۷

$$f(x)=\begin{cases}x-۲ & x\neq ۱\\ ۱ & x=۱\end{cases}$$



همان‌طور که در شکل می‌بینیم وقتی $x\to ۱$ حد تابع برابر -۱ خواهد بود.

۷۸

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{(۱-\cos x)}=\lim_{x\to ۰^+}(۱+\cos x)=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) = a\sin(۰+\frac{\pi}{۶}) = \frac{a}{۲}\ ,\ f(۰)=\frac{a}{۲}$$
$$\to \frac{a}{۲} = ۲ \to \boxed{a=۴}$$

۷۹

تابع f در $x=۱$ پیوسته است.

توابع g, h, k در $x=۱$ پیوسته نیستند.

۸۰

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (-۲x+۲) = -۲(۰^-)+۲ = ۰+۲ = ۲$$
$$f(۰) = -۲(۰)+۲ = ۰-۲ = ۲$$
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} (x^۲+۲) = (۰^+)^۲+۲ = ۰+۲ = ۲$$
$\to \lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) \to$ تابع f در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.

تابع f در نقاط دیگر به جز $x=۰$ هم پیوسته است.

۸۱

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} x^۲+۲[x] = (۱)^۲+۲[۱^+] = ۱+۲(۱) = ۳$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} bx+۶ = b(۱)+۶ = b+۶\ , f(۱)=a+۳$$
$$\to \begin{cases} a+۳=۳ \to a=۰ \\ b+۶=a+۳ \to b+۶=۳ \to \boxed{b=-۳} \end{cases}$$

۸۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۹}{|x-۳|}\ , & x<۳ \\ x^۲-ax\ , & x\geq ۳ \end{cases}$$
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} x^۲-ax = (۳)^۲-a(۳) = ۹-۳a$$
$$f(۳) = ۳^۲-a(۳) = ۹-۳a$$
$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۹}{|x-۳|} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۹}{-(x-۳)} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{(x-۳)(x+۳)}{-(x-۳)} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x+۳}{-۱} = -۶$$
$$\to ۹-۳a=-۶ \to ۱۵=۳a \to \boxed{a=۵}$$

۸۳

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲-۳x+۲} = \frac{۰}{۰}$$
$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲-۳x+۲} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x-۲)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۱}{x-۲} = \frac{۱+۱}{۱-۲} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$
$$,\ f(۱)=a \to \boxed{a=-۲}$$

۸۴

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{-x+|x-۲|}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$$
$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{-x|x-۲|}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{-x+(-x+۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{-۲x+۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{-۲(x-۱)}{(x-۱)} = -۲$$
$$, f(۱)=a \to \boxed{a=-۲}$$

۸۵

الف نادرست

۸۶

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\sin x + \cos x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$$

$$f(0) = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow$ f در صفر پیوسته نیست

۸۷

$$\underbrace{\lim_{x\to -2^+}(3-2x^2 = -5}_{} \quad , \quad \underbrace{\lim_{x\to -2^-}([x]) - 2 = -3-2 = -5}_{} \quad , \quad \underbrace{f(-2) = -5}_{}$$

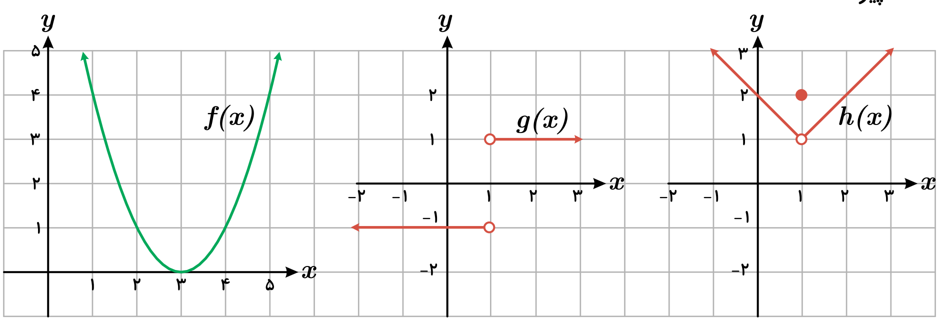
تابع در $x = -2$ پیوسته است

۸۸ گزینهٔ ۲

۸۹

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ} \quad \lim\limits_{x\to(-1)^-}(2[x]+1) = 2(-2)+1 = -3 \\ \text{حد راست} \quad \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2+4x) = 1-4 = -3 \\ f(-1) = -3 \end{array}\right\} \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \rightarrow \text{تابع پیوسته است}$$

۹۰ توابع g و h در $x = 1$ ناپیوسته هستند.



۹۱ شرط پیوستگی تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(a\sin x + b\cos 2x)$$

$$= a\sin\frac{\pi}{2} + b\cos 2(\frac{\pi}{2}) = a - b$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(a\sin(3x)+1) = a\sin(\frac{3\pi}{2}) + 1 = -a+1$$

$$a - b = 2 = -a + 1 \Rightarrow \begin{cases} -a+1 = 2 \Rightarrow a = -1 \\ a - b = 2 \Rightarrow -1 - b = 2 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

۹۲ شرط پیوستگی تابع f در $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax+2) = a+2 = f(1) = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(\sqrt{3x^2+1} - 2b) = \sqrt{3(1)^2+1} - 2b$$

$$= 2 - 2b = f(1) = 4 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

۹۳ تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است.

۹۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\,(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=۶\quad,\quad f(۳)=۶$$

$\lim_{x\to ۳} f(x)=f(۳)$ بنابراین تابع f در $x=۳$ پیوسته است.

$$g(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$$

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\,(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=۶$$

وجود ندارد $=g(۳)$ بنابراین تابع g در $x=۳$ پیوسته نیست.

۹۵

$$\lim_{x\to ۶^-} f(x)=\lim_{x\to ۶^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۶^+} f(x)=\lim_{x\to ۶^+} a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶}=a+\cos^۲\frac{۶\pi}{۳۶}=a+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=a+\frac{۳}{۴}$$

$$\to a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\to a=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}\to \boxed{a=-\frac{۱}{۴}}$$

۹۶

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} ۳x+۲b=۳(۰)+۲b=۲b$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} ۲\cos x+a=۲(۱)+a=۲+a\ ,\ f(۰)=-۲$$

$$\to\begin{cases}۲b=-۲\to \boxed{b=-۱}\\ ۲+a=-۲\to \boxed{a=-۴}\end{cases}$$

۹۷

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} ۲x+۳b=۲(۲)+۳b=۴+۳b$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} ax-۱=a(۲)-۱=۲a-۱\ ,\ f(۲)=۷$$

$$\to\begin{cases}۴+۳b=۷\to ۳b=۳\to \boxed{b=۱}\\ ۲a-۱=۷\to ۲a=۸\to \boxed{a=۴}\end{cases}$$

۹۸

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} ax^۲+۳=a(۱)^۲+۳=a+۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} -۲x+b=-۲(۱)+b=-۲+b\ ,\ f(۱)=۵$$

$$\to\begin{cases}a+۳=۵\to \boxed{a=۲}\\ -۲+b=۵\to \boxed{b=۷}\end{cases}$$

۹۹

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} ۳x-[x]=۳(۲)-\left[۲^-\right]=۶-۱=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} x+۳=۲+۳=۵\ ,\ f(۲)=a$$

تابع f در $x=۲$ پیوسته است پس داریم: $\boxed{a=۵}$

۱۰۰

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \sin x + ۲\cos x = ۱ + ۲(۰) = ۱$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} -\cos x = -(۰) = ۰\ ,\ f(\frac{\pi}{۲}) = ۱$$

تابع f در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوستگی چپ دارد

$$\to \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{۲})$$

۱۰۱

$x = ۲$ پیوستگی چپ در $\to f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (x^۲ + ۱) = (۲)^۲ + ۱ = ۵ \to \boxed{f(۲) = ۵}$

۱۰۲

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (-x + ۳) = -۱ + ۳ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (x^۲ - ۱) = ۱^۲ - ۱ = ۰$$

$$f(۱) = ۲ \to \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱)$$

تابع f در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد

۱۰۳

$$\lim_{x\to(-۳)} f(x) = \lim_{x\to(-۳)} |x + ۳| = ۰\ ,\ f(-۳) = ۳$$

تابع f در $x = -۳$ پیوسته نیست.

۱۰۴

الف) $x = -۲ \quad \lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = ۳,\ \lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = -۱\ ,\ f(-۲) = -۱$

تابع f در $x = -۲$ پیوستگی راست دارد

ب) $x = -۱ \quad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۱\ ,\ \lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = ۴,\ f(-۱) = ۱$

تابع f در $x = -۱$ پیوستگی چپ دارد

پ) $x = ۰ \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۴,\ \lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۰\ ,\ f(۰) = ۲$

تابع f در $x = ۰$ ناپیوسته است

ت) $x = ۱ \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱\ ,\ \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳\ ,\ f(۱) = ۳$

تابع f در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد

ث) $x = ۲ \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۰\ ,\ \lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۰\ ,\ f(۲) = ۰$

تابع f در $x = ۲$ پیوسته است

ج) $x = ۳ \quad \lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۰\ ,\ \lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۱\ ,\ f(۳) = ۱$

تابع f در $x = ۳$ پیوستگی راست دارد

۱۰۵

الف چپ

۱۰۶

$$۲ - ۵ = -۳ = ۲^۲ - ۷ \to$$
$$-۳ = -۳ = -۳$$

چون حد تابع و مقدار تابع برابر است پس تابع f در $x = ۲$ پیوسته می‌باشد.

۱۰۷

$-۲(۰)+a=(۰)^۲+۲=b+۱$

$a=۲, b=۱$

۱۰۸

$$\lim_{x\to ۱^+} fx=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+b)=۱+b=۲\to b=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} fx=\lim_{x\to ۱^-}(ax+۳)=a+۳=۲\to a=-۱$$

۱۰۹ شرط پیوستگی: حد راست = حد چپ = مقدار تابع

$$f(-۱)=a(-۱)+b=-a+b$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^-}(-۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^+} x^۲-b=(-۱)^۲-b=۱-b$$

$$\begin{cases} ۱-b=-۱\to b=۲ \\ -a+b=-۱ \xrightarrow{b=۲} -a+۲=-۱\to a=۳ \end{cases}$$

۱۱۰

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x-۹)=-۵$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۲x^۲+۳)=-۵$$

$$\to \lim_{x\to ۲} f(x)=-۵=f(۲)$$

در نتیجه تابع f در $x=۲$ پیوسته است.

۱۱۱

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x}{x+۳}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۲ شرط پیوستگی در نقطهٔ $x=۳$ آن است که:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$$

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲|x-۳|}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲(x-۳)}{x-۳}=۲$$

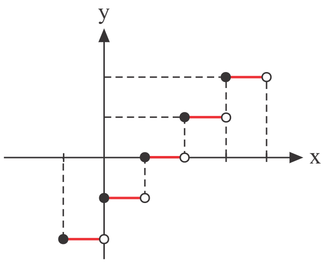
$x\to ۳^+$، پس عبارت درون قدر مطلق و خود عبارت بدون قدرمطلق بیرون می‌آید.

$$\lim_{x\to ۳^-}(۵x-۱۳)=۲,\ f(۳)=۲$$

بنابراین تابع در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است. تابع f در سایر نقاط نیز پیوسته است. تابع در سایر نقاط نیز پیوسته است. چرا که نمودار تابع در هر یک از ضابطه‌ها پیوسته و بدون بریدگی یا قطع‌شدگی است.

۱۱۳

$$f(x)=[x-۱]\to f(x)=[x]-۱$$



تابع f در تمام نقاط $x\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی راست دارد.

تابع f در تمام نقاط $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

تابع در تمام بازه‌های بصورت $(a,a+۱)$ به طوری که $a\in\mathbb{Z}$ باشد، پیوسته است.

تابع f در تمام بازه‌های بصورت $[a,a+۱)$ به طوری که $a\in\mathbb{Z}$ باشد، پیوسته است.

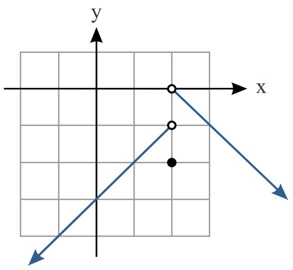
۱۱۴ الف) چون تابع $f(x)=x^۳-۵x$ چون تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن هم $\mathbb{R}$ می‌باشد پس تابع f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته می‌باشد.

ب) $g(x)=\sin x$ تابع مثلثاتی $\sin x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}$ می‌باشد و تمام بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته می‌باشد.

پ) $h(x)=\log x$ تابع $\log x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^+$ می‌باشد و در تمام بازه $(۰,+\infty)$ پیوسته می‌باشد.

ت) $k(x)=\sqrt{x-۶}$ تابع $\sqrt{x-۶}$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^{\geq ۶}$ می‌باشد و در تمام بازهٔ $[۶,+\infty)$ پیوسته می‌باشد.

۱۱۵ تابع f در $x=۲$ ناپیوسته است و در سایر نقاط پیوسته است.



۱۱۶

دو تابع چند جمله‌ای $۲ax+b$ و $x^۲+bx-a$ در دامنه شان پیوسته هستند، برای پیوستگی تابع در $\mathbb{R}$ کافی است که تابع در $x=۲$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} ۲ax+b=۲a(۲)+b=۴a+b$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} x^۲+bx-a=(۲)^۲+b(۲)-a=۲b-a+۴$$

$$f(۲)=۵$$

$$\to \begin{cases} ۴a+b=۵ \\ ۲b-a+۴=۵ \end{cases} \to \begin{cases} ۴a+b=۵ \\ -a+۲b=۱ \end{cases} \to \begin{cases} \cancel{۴a}+b=۵ \\ -\cancel{۴a}+۸b=۴ \end{cases} +$$

$$۹b=۹ \to \boxed{b=۱}$$

$$\to ۴a+۱=۵ \to ۴a=۴ \to \boxed{a=۱}$$

۱۱۷ دو تابع چند جمله‌ای $ax+۱$ و $۳x+b$ در دامنه‌شان پیوسته هستند، پس کافی است که تابع در $x=۴$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+} ۳x+b=۳(۴)+b=۱۲+b$$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-} ax+۱=a(۴)+۱=۴a+۱ \quad , f(۴)=۹$$

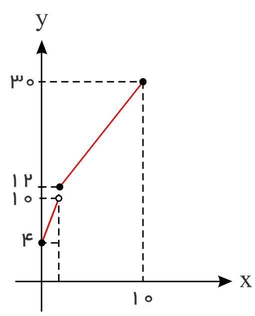
$$\to \begin{cases} ۱۲+b=۹ \to \boxed{b=-۳} \\ ۴a+۱=۹ \to ۴a=۸ \to \boxed{a=۲} \end{cases}$$

۱۱۸

$$f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & ۰\leq t<۱ \\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t\leq ۱۰ \end{cases}$$

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱۰=۱۴ \qquad f(۵)=۲(۵)+۱۰=۲۰$

ب) با توجه به نمودار رسم شده مشاهده می‌شود که تابع f در بازهٔ $[۰,۱۰]$ پیوسته نیست.



۱۱۹

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱ \to f(۲)=۵$

$g(۲)=$ وجود ندارد.

$h(۲) = ۳$

ب) $\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(۲x+۱) = ۵$

$\lim_{x\to ۲} g(x) = \lim_{x\to ۲}(۲x+۱) = ۵$

$\lim_{x\to ۲} h(x) = \lim_{x\to ۲}(۲+x) = ۴$

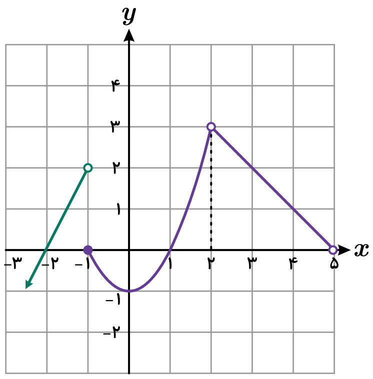
پ) $\lim_{x\to ۲} f(x) = f(۲) \to$ تابع f در $x = ۲$ پیوسته است.

$g(۲) =$ وجود ندارد. $\to$ تابع g در $x = ۲$ پیوسته نیست.

$\lim_{x\to ۲} h(x) \neq h(۲) \to$ تابع h در $x = ۲$ پیوسته نیست.

۱۲۰

الف



ب

$D_f = (-\infty, ۲) \cup (۲, ۵) \quad , \quad R_f = (-\infty, ۳)$

پ در بازهٔ $[-۱, ۱]$ ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x) = x^۲ - ۱$؛ یعنی چندجمله‌ای است، پس پیوسته است.

همچنین در بازهٔ $(۲, ۵)$ ضابطهٔ تابع $f(x) = -x + ۵$ است که پیوسته است.

در بازهٔ $[-۲, ۰]$ ناپیوسته است؛ زیرا در نقطهٔ $x = -۱$ ناپیوسته می‌باشد.

۱۲۱

الف نادرست، زیرا در $x = -۱$ پیوستگی چپ ندارد.

ب درست

پ نادرست، زیرا در $x = ۲$ پیوستگی راست و در $x = ۵$ پیوستگی چپ ندارد.

ت نادرست. تابع در سمت راست نقطهٔ $x = ۵$ تعریف نشده، پس حد ندارد.

ث درست

ج نادرست، زیرا در $x = -۱$ ناپیوسته است.

۱۲۲

الف تابع در $[۳, ۴]$ پیوسته ولی در $[-۲, ۱/۵]$ ناپیوسته است.

ب تابع f روی $[-۱, ۲)$ پیوسته است ولی روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ ناپیوسته است.

۱۲۳ می‌دانیم تابع $y = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، پس k باید طوری انتخاب شود تا در بازهٔ موردنظر عدد صحیحی واقع نشود. بنابراین حداکثر مقدار k می‌تواند ۲ باشد.