استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

(طرفین وسطین) الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ab=bc$

(تبدیل حاصل ضرب به تناسب) ب) $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(معکوس کردن تناسب) ب) $\frac{a}{b}=\frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(تعویض جای طرفین با وسطین) ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \end{cases}$

(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج) ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \end{cases}$

(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج) ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} \end{cases}$

سوال ۱: در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن

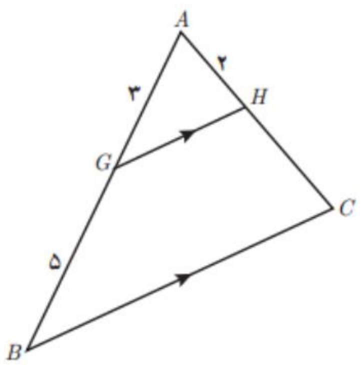
در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

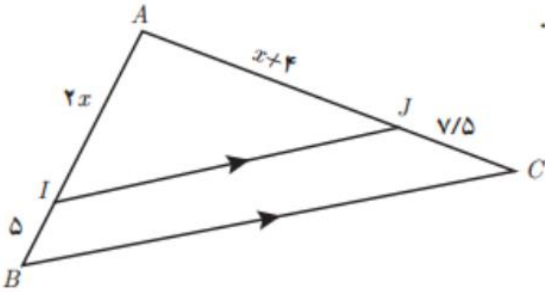
استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

«تکمیل در کلاس»

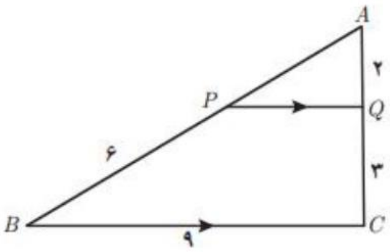
سوال ۲: در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به‌دست آورید.



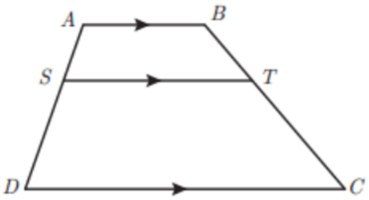
سوال۳: با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره‌خط‌های AI و AJ را به‌دست آورید.



سوال۴: در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



سوال۵: در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$. (راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



سوال۶: ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیر مستقیم** یا **برهان خلف** است. در برهان خلف به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به‌درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیر ممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

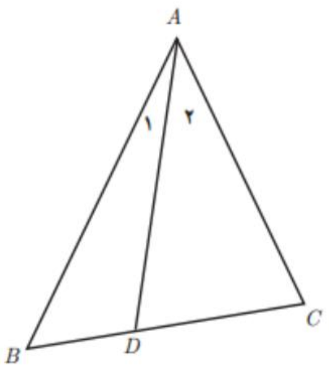
حل:

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان نوشت $n = 2k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال: فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.

حل:



با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $A\hat{B}D \cong A\hat{C}D$. از این همنهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

عکس قضیه تالس با برهان خلف: مانند: شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

سوال۷: با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

قضیه های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\triangle}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد: AD AE EC DB

اگر $DE \parallel BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دوشرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$ (که اگر و تنها اگر خوانده می‌شود) بیان کرد؛ به طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

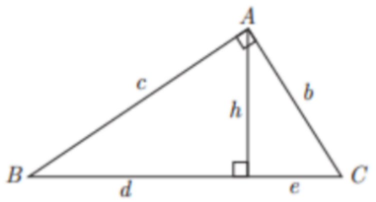
مثال: در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.

مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

«تکمیل در کلاس»

برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

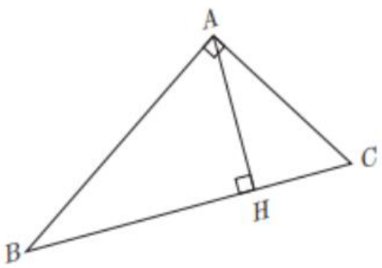
سوال۸: در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.



الف) $h = ۵$ $\quad d = ۷ \quad e = ?$

ب) $d = ۵ \quad e = ۳ \quad b = ? \quad c = ?$

سوال۹: در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.



الف) $BC = ۱۰ \;,\; BH = ۹ \;,\; AH = ? \;,\; AB = ? \;,\; AC = ?$

ب) $AC = ۵ \;,\; CH = ۲ \;,\; BC = ? \;,\; AH = ? \;,\; AB = ?$

سوال ۱۰: شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.