

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و تساوی توابع)

- تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می دهد.
- روش های نمایش تابع:

مثال	شرط تابع بودن	روش نمایش											
	از هر عضو مجموعه مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	پیکانی (نمودار وِن)	۱										
<p>تابع است. $\rightarrow \{(1, 2), (2, 3), (-1, 3)\}$</p> <p>تابع نیست. $\rightarrow \{(2, 2), (3, 5), (6, 6)\}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> مؤلفه های اول زوج مرتبها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه های دومشان نیز برابر باشد. 	زوج مرتبی	۲										
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۵</td> <td>۳</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-۱</td> <td>۷</td> <td>۴</td> <td>۲</td> </tr> </table> <p>تابع نیست.</p>	x	۲	۳	۵	۳	y	-۱	۷	۴	۲	<ul style="list-style-type: none"> مؤلفه های سطر مربوط به Xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه های X یکسان داشتیم، مؤلفه های Y شان هم باید یکسان باشد. 	جدولی	۳
x	۲	۳	۵	۳									
y	-۱	۷	۴	۲									
	اگر خطی موازی محور Yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	نموداری	۴										
<p>ورودی: انسانها</p> <p>رابطه ای که به هر فرد، کد ملی اش را نسبت می دهد. خروجی: کد ملی</p> <p>چون هر شخص نمی تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.</p>	با توجه به جمله توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	توصیفی	۵										
<p>در رابطه $y = x + 1$، اگر $x = 1$ را بدهیم، ۲ تا خروجی می دهد:</p> <p>تابع نیست. $y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \rightarrow$</p>	<ul style="list-style-type: none"> اگر به ازای هر X، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن ها Y تنها می شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $y = \log_7 x + \cos \frac{1}{x}$ <p>تنها</p>	ضابطه ای	۶										

«کلاس درس»



مختصات نقطه (نقاط)	راه حل	نقطه برخورد تابع f با ...
$f(x) = 0$ جوابهای $(, 0)$	«y را صفر می‌دهیم» یا «جوابهای معادله $f(x) = 0$ »	محور xها
$(0, f(0))$	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(0)$ »	محور yها
$(x_1, f(x_1)), \dots$	حل معادله $f(x) = g(x)$ ← جوابها \dots, x_1	تابع g
$(x_1, x_1), \dots$	حل معادله $f(x) = x$ ← جوابها \dots, x_1	نیمساز ربع اول و سوم

«کلاس درس»



محاسبه دامنه در نمایش ضابطه‌ای:

دامنه	ضابطه	اسم تابع
\mathbb{R}	$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$	چندجمله‌ای
$\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	$f(x) = \frac{A}{B}$	کسری
جواب نامعادله $A \geq 0$	$f(x) = \sqrt[n]{A}$	رادیکال با فرجه زوج
$(A > 0) \cap (B > 0) \cap (B \neq 1)$	$f(x) = \log_B A$	لگاریتم

سوال ۱: دامنه توابع گویا زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

«کلاس درس»



سوال ۲: اگر دامنه $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ به صورت $R - \{3\}$ باشد، $a - b$ کدام است؟





• شروط تساوی دو تابع f و g :

۱	$D_f = D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن تابع باید محاسبه شوند).
۲	ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

• نکات مهم در تساوی توابع:

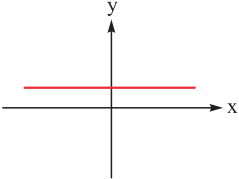
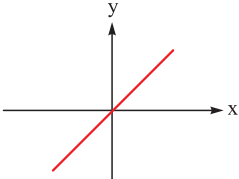
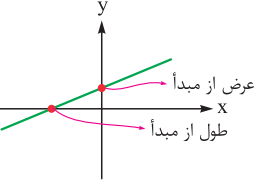
۱	دامنه تابع به فرم $y = \sqrt{AB}$ از حل نامعادله $AB \geq 0$ و دامنه تابع به فرم $y = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A \geq 0$ و $B \geq 0$ به دست می‌آید.
۲	توابع $y = A$ و $y = \frac{AB}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد.
۳	توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{AB}{B} & B \neq 0 \\ C & B = 0 \end{cases}$ و $g(x) = \dots$ به شرطی برابرند که $\left. \begin{array}{l} \text{اولاً: } g(x) = A \\ \text{ثانیاً: مقدار } g(x) \text{ به ازای ریشه } B = 0, \text{ برابر با } C \text{ شود.} \end{array} \right\}$
۴	$\log x^3 = 3 \log x$ و $\log x^2 = 2 \log x $

سوال ۳: آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ با ضابطه با هم برابرند؟ چرا؟ 

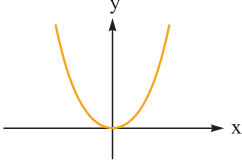
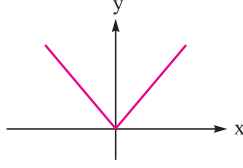
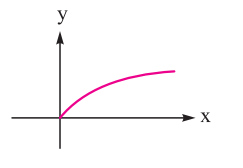
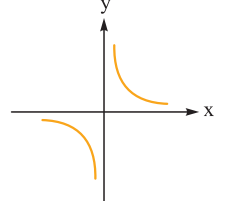
سوال ۴: دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ با هم برابرند؟ چرا؟ (نهایی خرداد ۱۴۰۳) 

انواع تابع

چند تابع خاص

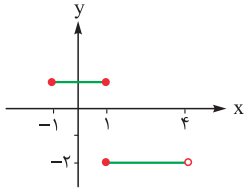
نمودار	نکته	ضابطه	تابع
<p>یک خط افقی</p> 	<ul style="list-style-type: none"> در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل X باید صفر باشد. 	$f(x) = c$ <small>عدد</small>	ثابت
<p>نیمساز ربع اول و سوم</p> 	<ul style="list-style-type: none"> در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب X، یک و ضرایب سایر جملات صفر است. 	$f(x) = x$	همانی
	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ <small>شیب</small>	<p>محل برخورد با محور yها $h \rightarrow$</p> <small>عرض از مبدأ</small>	$f(x) = mx + h$ خطی

چند تابع معروف با نمودارشان:

ضابطه	$y = x^2$	$y = x $	$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{x}$
نمودار				
دامنه	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$[0, +\infty)$	$\mathbb{R} - \{0\}$
برد	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$\mathbb{R} - \{0\}$

جزء صحیح

تابع پله ای:

تعریف	توابع چندضابطه‌ای که همه ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.
نمودار	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.
مثال	$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x < 1 \\ -2 & 1 \leq x < 4 \end{cases}$
شکل	

تعریف جزء صحیح یا براکت:

تعریف	<p>جزء صحیح هر عدد صحیح، خودش می‌شود: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$</p> <p>جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، عدد صحیح ماقبل آن می‌شود: $k < x < k+1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} [x] = k$</p>
-------	--

سوال ۵: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$[۲.۶] =$$

$$[-۲۳.۸۹] =$$

$$[-۰.۵] =$$

$$[۱۰.۸] =$$

سوال ۶: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.



$$\left[\frac{x+1}{2} \right] = -1$$

$$۲[x] + ۵ = ۰$$



«کلاس درس»





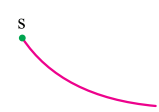
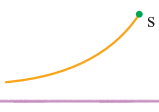
سوال ۷: تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $(-3, 3]$ را رسم کنید.



سوال ۸: نمودار تابع $y = 1 - 2[x]$ را در بازه‌ای $(-1, 2]$ را رسم کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)



نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\sqrt{bx+c} + d$ به یکی از چهار شکل زیر است:

مختصات نقطه شروع (S)	شکل نمودار	علامت b	علامت a	
		+	+	۱
		-	+	۲
		+	-	۳
		-	-	۴

ریشه داخلی رادیکال $(\frac{-c}{b})$ ، عدد بیرونی (d)

سوال ۹: نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید. ?

سوال ۱۰: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید. ?

اعمال جبری روی توابع

چهار عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

• اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی با یک مثال:

مثال فرض کنید $f = \{(1, 4), (2, 7), (3, 10)\}$ و $g = \{(2, -1), (3, 6), (4, 1)\}$ باشد و ما $f + 2g$ را بخواهیم.

مرحله ۱	اشتراک دامنه‌های f و g را می‌نویسیم: $D_{f+2g} = \{2, 3\}$
مرحله ۲	مقدار $f + 2g$ را به ازای x های دامنه به دست می‌آوریم: $x = 2: f(2) + 2g(2) = 7 + 2(-1) = 5 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (2, 5)$ $x = 3: f(3) + 2g(3) = 10 + 2(6) = 22 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (3, 22)$
مرحله ۳	$f + 2g = \{(2, 5), (3, 22)\}$

سوال ۱۱: اگر تابع $f = \{(1, 4), (0, -2), (-2, 3), (5, 1)\}$ و تابع $g = \{(-2, 6), (2, 5), (0, 3), (1, 2)\}$ داشته باشیم:

الف) حاصل $f + g$ و $f - g$ را بدست آورید.

ب) حاصل $\frac{2g}{f}$ را بدست آورید.

سوال ۱۲: اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \frac{5x+4}{x-3}$ باشند. آنگاه دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

تابع یک به یک

- به تابعی که در خروجی هایش، عدد تکراری نداریم، یک به یک می‌گوییم.

نمایش	شرط یک به یک بودن
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها باید متفاوت باشند.
جدولی	اعداد سطر دوم جدول باید متفاوت باشند.
پیکانی	به هیچ عددی نباید بیشتر از یک پیکان وارد شود.
نموداری	خطی موازی محور x ها نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.
ضابطه‌ای	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- یک به یک کردن توابع غیر یک به یک با محدود کردن دامنه:

ضابطه	بزرگ‌ترین بازه یک به یکی	توضیح	نمودار
$ax^2 + bx + c$	$x \geq \frac{-b}{2a}$ یا $x \leq \frac{-b}{2a}$	x های قبل یا بعد از x_S	
$ ax + b + c$	$x \geq \frac{-b}{a}$ یا $x \leq \frac{-b}{a}$	x های قبل یا بعد از ریشه قدرمطلق	

سوال ۱۳: آیا تابع درجه دوم $y = 2x^2 - 4x - 3$ یک به یک است؟



تابع وارون

• نکات اولیه تابع وارون:

۱	اگر نقطه (a, b) روی f باشد، نقطه (b, a) روی f^{-1} است و برعکس.
۲	$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
۳	$R_{f^{-1}} = D_f$ و $D_{f^{-1}} = R_f$
۴	نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.
۵	شرط وارون پذیری، یک به یک بودن است.

برای محاسبه $f^{-1}(k)$ ، بهترین راه این است که معادله $f(x) = k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می شود؛ مثلاً اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادله $x + \sqrt{x} = 12$ را حل می کنیم که جوابش می شود ۹.

۴	۳	۲	۱	ناحیه ای که نمودار f در آن است.
۲	۳	۴	۱	ناحیه ای که نمودار f^{-1} در آن قرار می گیرد.

مراحل به دست آوردن ضابطه وارون:

(۱) x را بر حسب y می نویسیم (باید x تنها شود).

(۲) جای x و y را عوض می کنیم.

راه های به دست آوردن نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1} :

روش	توضیح روش
۱	ضابطه f^{-1} را به دست می آوریم و بعدش معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل می کنیم.
۲	نمودار f را نسبت به $y = x$ قرینه می کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می شود.
۳	اگر f صعودی اکید باشد، جواب های معادله $f(x) = x$ ، طول نقاط برخورد f و f^{-1} است.

سوال ۱۴: ضابطه وارون هریک از توابع زیر را بدست آورید.



الف) $y = 2x - 4$

ب) $y = \sqrt{x+2} - 4$

پ) $y = \frac{x+5}{4}$

ت) $y = \frac{2x+4}{x-3}$

سوال ۱۵: اگر وارون تابع $f(x) = ax + 4$ از نقطه $(5, \frac{5}{4})$ بگذرد، آنگاه ضابطه وارون f را بدست آورید؟ (نهایی خرداد ۱۴۰۳)





سوال vip: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 + x + b$ باشد و تساوی $f(x) = g(x)$ به ازای هر عدد حقیقی

x برقرار باشد، $a + 2b$ کدام است؟



سوال vip: معادله $[x + 2] + [x + 3] + [x + 4] = 9$ را حل کنید؟



سوال vip: نمودار تابع $f(x) = 2[x] - 1$ در بازه $[-1, 2)$ رسم کنید؟

سوال vip: نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x - 3}$ را با استفاده از انتقال نمودار رسم کرده و دامنه و برد آن را بدست آورید؟

سوال vip: آیا دو تابع $f(x) = \log x^2$ و $g(x) = 2 \log x$ با یک دیگر برابر هستند؟ چرا؟

سوال vip: اگر $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ و $g(x) = x - 2$ باشد. حاصل $f(-3) + g^{-1}(3)$ را بدست آورید؟

سوال vip: قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ را خط d می‌نامیم. عرض از مبدا خط d را بیابید؟

سوال vip: نمودار تابع وارون، تابع خطی $f(x) = -x + m$ از نقطه $(-3, 1)$ می‌گذرد. ابتدا مقدار m را بدست آورید و سپس ضابطه وارون تابع را بنویسید؟

سوال vip: اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ باشد. ضابطه و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید؟

سوال vip: اگر $f = \{(2, -1)(3, 1)(1, 0)(4, 2)\}$, $g = \{(1, 1)(2, 3)(3, 1)\}$ باشد

الف) تابع $\frac{g}{f}$ را به صورت زوج مرتب بنویسید؟

ب) آیا تابع g یک تابع یک به یک است؟ چرا؟