

مقدمات

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

	برای زاویه α در شکل مقابل	تعریف	نسبت
	$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$	مقابل وتر	سینوس
	$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$	مجاور وتر	کسینوس
	$\tan \alpha = \frac{AB}{AC}$	مقابل مجاور	تانژانت
	$\cot \alpha = \frac{AC}{AB}$	مجاور مقابل	کتانژانت

نسبت های مثلثاتی زوایا مهم:


	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ت.ن
cot	ت.ن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

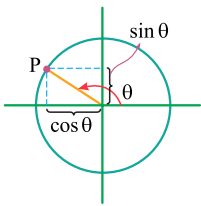
«تکمیل در کلاس»




علامت نسبت های مثلثاتی در ۴ ناحیه دایره مثلثاتی:

ناحیه	محدوده	sin	cos	tan	cot
اول	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
دوم	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	-	-	-
سوم	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	-	+	+
چهارم	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-	+	-	-

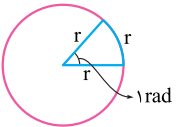
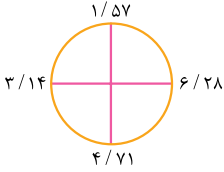
مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به صورت $P(\underbrace{\cos \theta}_{x_p}, \underbrace{\sin \theta}_{y_p})$ است. 



سوال ۱: اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$, $\sin x > 0$, نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه x را بیابید. 

رادیان

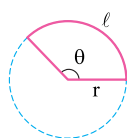
نکات اولیه رادیان:

	زاویه مرکزی روبه‌رو به کمائی که طولش برابر با شعاع دایره است:	تعریف ۱ رادیان	۱
	$1 \text{ rad} = 57/3^\circ$	تقریب ۱ رادیان	۲
		مرزها برحسب رادیان	۳
	$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$	رابطه بین درجه و رادیان	۴
	$D \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} R$ $R \xleftarrow{\times \frac{\pi}{180}} D$	تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس	۵

زوایای مهم برحسب درجه و رادیان

15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

طول کمان روبه‌رو به زاویه θ رادیان در دایره ای به شعاع r :



$$l = r\theta$$

برحسب رادیان

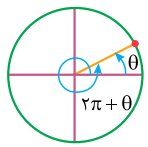
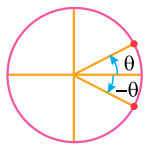
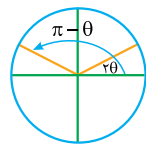
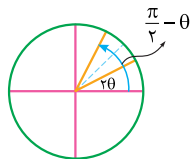
در سؤالات «چرخیدن دو قرقره متصل به یک تسمه» یا «چرخیدن دو چرخ وسیله ای که چرخ‌های نابرابر دارد»، شروع حل با برابر قراردادن طول کمان‌های طی شده است:

$$l_1 = l_2 \Rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \dots$$

سوال ۲: دو قرقره با سایزهای متفاوت توسط تسمه ای به هم متصل شده‌اند. اگر شعاع قرقره‌ی بزرگ‌تر، ۳ برابر شعاع قرقره‌ی کوچک‌تر باشد، زمانی که قرقره‌ی کوچک‌تر ۱۰۸ درجه می‌چرخد، قرقره‌ی بزرگ‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم پایان

هم پایان	قرینه	مکمل	متمم	
زوایایی که اختلافشان مضربی از 360° است.	قرینه θ یعنی $-\theta$	دو زاویه که مجموعشان 180° است.	دو زاویه که مجموعشان 90° است.	تعریف
$2k\pi + \theta$ یا $360k + \theta$	$-\theta$	$\pi - \theta$ یا $180^\circ - \theta$	$\frac{\pi}{2} - \theta$ یا $90^\circ - \theta$	برای زاویه θ
				روی دایره
یک یا چند دور کامل می‌زند.	قرینه نسبت به محور Xها	قرینه نسبت به محور Yها	قرینه نسبت به $y = x$	
همه‌چی ثابت می‌ماند.	COS ها برابر و بقیه قرینه هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!)	SIN ها برابر و بقیه قرینه هم هستند.	SIN یکی با COS دیگری و TAN یکی با COT دیگری برابر است و بالعکس.	رابطه با نسبت‌های زاویه θ
$\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$	$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$	$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$	$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$	مثال

«تکمیل در کلاس»



سوال ۳: مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید:



الف) 75°

ب) -25°

پ) $\frac{\pi}{12}$ رادیان

ت) $-\frac{\pi}{4}$ رادیان

نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ بر حسب زاویه α در ۳ مرحله:

مرحله ۱	$0 < \text{زاویه} < 2\pi$	اگر کمان از 2π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب 2π را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدوده 0 تا 2π برسیم.
مرحله ۲	تغییر اسم می‌دهد یا نه	اگر π یا 2π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ داشتیم، \sin به \cos (و بالعکس) و \tan به \cot (و بالعکس) تبدیل می‌شود.
مرحله ۳	علامت + یا -	α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً 1°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدوده زاویه $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

حذف

مرحله ۱: از $\frac{7\pi}{2}$ ، 2π کم می‌کنیم:

مرحله ۲: به خاطر $\frac{3\pi}{2}$ ، \sin به \cos تبدیل می‌شود.

مرحله ۳: با فرض $\alpha = 1^\circ$ ، زاویه $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ می‌شود 26° که در ربع ۳ قرار دارد و در این ربع \sin منفی است.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

مرحله ۲ ↑
مرحله ۳ ↓

پس:

«تکمیل در کلاس»



سوال ۴: حاصل هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید. ?

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$\tan(225^\circ) =$$

$$\cos(-135^\circ) =$$

سوال ۵: حاصل عبارت زیر را بدست آورید؟ (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

$$A = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \sin(66^\circ) \cot(-30^\circ)$$

سوال ۶: حاصل عبارت زیر را بدست آورید؟

$$A = 2 \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{7\pi}{4}$$

توابع مثلثاتی

نمودار توابع مثلثاتی

ضابطه تابع		دامنه	بُرد	دوره تناوب	نقاط max	نقاط min	صفرهای تابع
$y = \sin x$		\mathbb{R}	$[-1, 1]$	2π	$2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	$k\pi$
$y = \cos x$		\mathbb{R}	$[-1, 1]$	2π	$2k\pi$	$2k\pi + \pi$	$k\pi + \frac{\pi}{2}$

«تکمیل در کلاس»



پیدا کردن علامت a و b در توابع $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos(bx) + c$ 🦉

نمودار کسینوسی		نمودار سینوسی		شکل نمودار در سمت راست محور yها
صعودی یا مثل $-\cos x$	نزولی یا مثل $\cos x$	نزولی یا مثل $-\sin x$	صعودی یا مثل $\sin x$	شبه به ...
$a < 0$	$a > 0$	ناهم علامت اند. ($ab < 0$)	هم علامت اند ($ab > 0$)	علامت a و b

سوال ۷: نمودارهای توابع زیر را رسم کنید؟



الف) $y = 1 - \sin x$

ب) $y = 2 \cos x - 2$

پ) $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

ت) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

سوال vip: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.



$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(75^\circ) \cdot \tan(225^\circ)$$

سوال vip: نمودار تابع $f(x) = 2 \cos(x) - b$ از نقطه‌های $(\frac{\pi}{3}, 5)$ و $(\frac{2\pi}{3}, -1)$ می‌گذرد.



الف) مقادیر a و b را بدست آورید.

ب) مقدار $f(\frac{7\pi}{6})$ را بدست آورید.

سوال vip: اگر نقطه $A(\frac{\pi}{6}, 2b + 1)$ یک نقطه از تابع $y = 2\sqrt{3}\cos x + 1$ باشد، مقدار b را بدست آورید؟



سوال vip: نمودار های زیر را رسم کنید؟

الف) $y = -\sin x + 2$

ب) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

سوال vip: اگر $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟