

مقدمات حد

سوال ۱: اگر $(1, a - b) \cup (2a - 3, 3a + b)$ یک همسایگی محذوف γ باشد، آنگاه حاصل $a + b$ کدام است؟

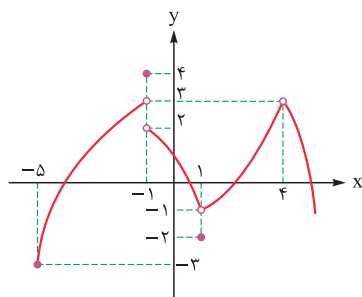
تعریف حد

نوع حد	نماد ریاضی	تعریف	روی نمودار
حد راست	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	اگر x با مقادیر بیشتر از a (از سمت راست) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطه a و سمت چپش نداریم.	
حد چپ	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	اگر x با مقادیر کمتر از a (از سمت چپ) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطه a و سمت راستش نداریم.	
حد	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	اگر حد راست و چپ در $x = a$ هر دو برابر با L باشند، در $x = a$ حد داریم. کاری با خود نقطه a نداریم.	

برای آن که تابع f در $x = a$ حد داشته باشد (و مقدار حدش L باشد) باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

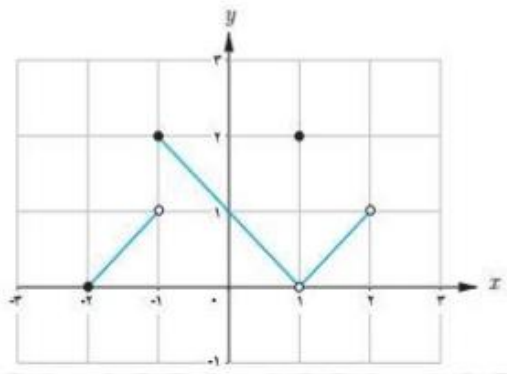
۱	در $x = a$ همسایگی راست و چپ داشته باشد.
۲	حد راست و چپ در $x = a$ برابر L باشد.

یک مثال:



طول نقطه	حد راست	حد چپ	حد	مقدار
$x = -5$	-3	ندارد	ندارد	-3
$x = -1$	2	3	ندارد	4
$x = 1$	-1	-1	-1	-2
$x = 4$	3	3	3	تعریف نشده

سوال ۲: برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟




الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$

ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

چه وقت‌هایی برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، باید حد راست و چپ را چک کنیم؟ 

نقاط مهم	مثال	بررسی حد وقتی $x \rightarrow 1$
چندضابطه‌ای	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 2x - 3 & x < 1 \end{cases}$	حد ندارد. $\left. \begin{array}{l} \text{حد راست: } 1^2 + 2 = 3 \\ \text{حد چپ: } 2(1) - 3 = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{3 \neq -1}$
قدرمطلق (در حالت $\frac{0}{0}$) ریشه‌های قدرمطلق	$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{ x - 1 }$	حد ندارد. $\left. \begin{array}{l} \text{حد راست: } \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4 \\ \text{حد چپ: } \frac{(x-1)(x+3)}{-(x-1)} = -4 \end{array} \right\} \xrightarrow{4 \neq -4}$
براکتی داخل براکت عدد صحیح شود.	$f(x) = [2x] - [x]$	$\left. \begin{array}{l} \text{حد راست: } [2^+] - [1^+] = 2 - 1 = 1 \\ \text{حد چپ: } [2^-] - [1^-] = 1 - 0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حد} = 1$

سوال ۳: آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

سوال ۴: تابع با ضابطه زیر، به ازای کدام مقادیر a در $x = 0$ دارای حد می باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

سوال ۵: مطلوب است محاسبه حد توابع زیر :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{5x^2 + \frac{2}{3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\frac{3}{5}x^2 - 2x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

فرق $\lim [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، آن وقت:

مهم است که حاصل حد بالا L^+ شده یا L^- . هر کدام بود، از آن برکت می‌گیریم.	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$	۱
$[\lim_{x \rightarrow 0} \cos x] = [1^-] = 0$	مثال	
خود L مهم است (کاری نداریم L^+ است یا L^-). حاصل حد $[L]$ می‌شود.	$[\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$	۲
$[\lim_{x \rightarrow 0} \cos x] = [1] = 1$	مثال	

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه:

$\frac{f}{g}$	$f \times g$	$f \pm g$	تابع
$\frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$	$L_1 \times L_2$	$L_1 \pm L_2$	حد در $x = a$

«تکمیل در کلاس»



رفع ابهام «صفر/صفر»

روش های کتاب درسی!

روش حل	چه جوری حل می کنیم؟	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل $x - a$ پیدا کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{4}{-1} = -4$
گویا کردن با اتحاد مزدوج	صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{2x-4} \times \frac{\sqrt{5x-1}+3}{\sqrt{5x-1}+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x-1-9}{6(2x-4)}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(\cancel{x-2})}{12(\cancel{x-2})} = \frac{5}{12}$
گویا کردن با اتحاد چاق و لاغر	صورت و مخرج را در چاق عبارت رادیکالی ضرب می کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-5} \times \frac{\sqrt{(x+3)^2} + 2\sqrt{x+3} + 4}{\sqrt{(x+3)^2} + 2\sqrt{x+3} + 4}$ $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\cancel{x+3}-8}{12(\cancel{x-5})} = \frac{1}{12}$
حدهای مثلثاتی	استفاده از اتحادهای $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$... و $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x}$ $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cancel{\cos x} - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cancel{\sin x} - \cos x}$ $= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

«تکمیل در کلاس»



سوال ۶: مطلوب است محاسبه حد توابع زیر :



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$$

سوال ۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ کدام است؟



سوال ۸: حد تابع $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos 2x}{\sin x}$ را محاسبه کنید؟



نموداری	تعریف	نوع پیوستگی
	مقدار = حد راست	پیوستگی راست
	مقدار = حد چپ	پیوستگی چپ
	مقدار = $\underbrace{\text{حد چپ} = \text{حد راست}}_{\text{حد}}$	پیوستگی

پیدا کردن مجهول در توابع پیوسته

فرم تابع	برای پیوستگی f در x = a چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطه مرزی دامنه
۱ $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ k & x = a \end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیرد و مقدارش هم k است.	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$
۲ $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیرد.	$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$
۳ $f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ k & x = a \\ h(x) & x < a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیرد و مقدارش k است.	$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = k$

\sqrt{x} فرد | $|x|$ | $\cos x$ | $\sin x$

توابع پیوسته روی \mathbb{R}

«تکمیل در کلاس»



سوال ۹: پیوستگی تابع‌های زیر را در $X = 3$ بررسی کنید.

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ و } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

سوال ۱۰: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $X = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$$

سوال ۱۱: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه زیر، بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

سوال vip: اختلاف حد راست و چپ تابع زیر در نقطه‌ی $x = -4$ چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2}, & |x| \leq 4 \\ x - 4, & |x| > 4 \end{cases}$$

سوال vip: حاصل حد های زیر را محاسبه کنید؟

۱) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} =$

۲) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4 - x^2} =$

سوال vip: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$ کدام است؟



سوال vip: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - [x^2]}$ کدام است؟



سوال vip: تابع با ضابطه‌ی زیر، به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی به طول $x=1$ پیوسته است؟



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}, & x > 1 \\ ax - a + 2, & x \leq 1 \end{cases}$$

سوال vip: به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی زیر، در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$