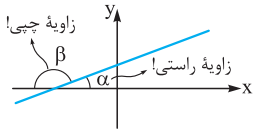


هندسه تحلیلی

$$\text{شیب} = \frac{\text{اختلاف } y \text{ ها}}{\text{اختلاف } x \text{ ها}} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

• شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B:



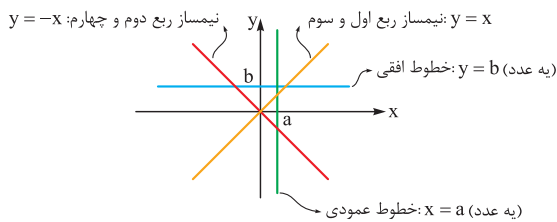
• تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، همان شیب است: $m = \tan \alpha$

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

• اگر سه نقطه A، B و C روی یک خط (یا راستا یا امتداد) باشند، آن‌گاه:

$y - y_0 = m(x - x_0)$	معادله خط گذرنده از نقطه (x_0, y_0) با شیب m
$y = mx + h$	معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h

• نوشتن معادله خط در چند حالت پرکاربرد:



• معادله خطوط خاص:

• برای به دست آوردن مختصات نقطه تقاطع دو خط، باید یک دستگاه دو معادله - دو مجهول حل کنیم.

مثال	شرط	حالات دو خط نسبت به هم
$y = 3x + 4$ $y = 3x - 2$	$m_1 = m_2, h_1 \neq h_2$	موازی (غیرمنطبق)
$y = \frac{3}{4}x + 1$ $y = \frac{-4}{3}x + 2$	$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 = -1$	عمود
$y = x - 1$ $y = 3x + 4$	$m_1 \neq m_2$	متقاطع
$y = 2x + 5$ $2y = 4x + 10$	$m_1 = m_2, h_1 = h_2$	منطبق

• وضعیت دو خط نسبت به هم:

سوال ۱: معادله خط گذرنده از نقطه $P(2, -1)$ را بنویسید؛ به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.

سوال ۲: خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف) m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

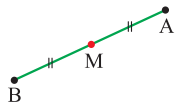
ب) به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

سوال ۳: خط گذرنده از دو نقطه $(a, 2a)$ و $(1, -1)$ بر خط به معادله $2x - 5y = 7$ عمود است. مقدار a کدام است؟

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\text{اختلاف } x)^2 + (\text{اختلاف } y)^2}$$

• فاصله دو نقطه A و B:

سوال ۴: نقاط $A(2, 0)$ و $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر بگیرید. محیط مثلث ABC را با محاسبه طول اضلاع آن بدست آورید.



$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

• نقطه وسط پاره خط AB:

سوال ۵: نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و $B(7, -2)$ است.

الف) مختصات نقطه A را بیابید.

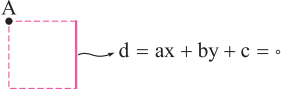

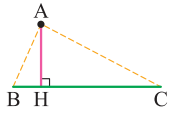
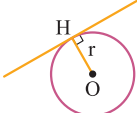
ب) قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را به دست آورید.

پ) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$:

• کاربردهای فاصله نقطه از خط در سوالات:

توضیح	شکل	مقدار قابل محاسبه
فاصله A تا خط $d = 0$ = ضلع		ضلع مربع
فاصله A تا قطر = نصف قطر		قطر مربع
فاصله رأس A تا ضلع BC = طول ارتفاع AH		ارتفاع مثلث
فاصله مرکز تا خط مماس = شعاع		شعاع دایره

سوال ۶: خط $4x - 3y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را بدست آورید. (نهایی)

(۱۴۰۳)

سوال ۷: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست

آورید.

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$:

سوال ۸: نشان دهید دو خط به معادله $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یک دیگر موازی هستند؟

کاربردهای فاصله دو خط موازی در سوالات:

توضیح	شکل	
فاصله d_1 تا d_2 = ضلع مربع		مربع
فاصله d_1 تا d_2 = طول فاصله d_2 تا d_1 = عرض		مستطیل
فاصله دو خط مماس موازی = قطر		دایره

«کلاس درس»



معادله درجه دو

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

• ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$:

• تعداد ریشه‌ها:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
۲ ریشه متمایز	یک ریشه مضاعف ↓ $x_{\text{مضاعف}} = \frac{-b}{2a}$	ریشه حقیقی ندارد.

• اگر عبارت درجه دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

• دو حالت خاص پر کاربرد:

مثال	ریشه‌ها	رابطه بین ضرایب
$3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$	$1, \frac{c}{a}$	$a + b + c = 0$
$5x^2 - 7x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{12}{5} \end{cases}$	$-1, \frac{-c}{a}$	$a + c = b$

«کلاس درس»



سوال ۹: ریشه معادلات $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ و $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ را بیابید؟




جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها
$S = \frac{-b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$

• با شرط $\Delta > 0$ داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P, x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$$


• مجموع مربع و مکعب ریشه‌ها:


• اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید. 

• معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

«کلاس درس»



سوال ۱۰: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ باشند. (نهایی ۱۴۰۳) 

سوال ۱۱: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بدست آورید؟ 

P	S	Δ		
+	+	+	دو ریشه مثبت	۱
+	-	+	دو ریشه منفی	۲
-			دو ریشه ناهم علامت	۳
-	۰		دو ریشه قرینه	۴
۱		+	دو ریشه معکوس	۵

بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو

ریشه منفی داشته باشد، باید سه نامعادله $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$

را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

• اگر $P < 0$ باشد (یا a و c هم علامت نباشند)، حتماً $\Delta > 0$ است و نیازی به چک کردن شرط $\Delta > 0$ نیست.

سوال ۱۲: در هریک از موارد زیر تعداد و علامت ریشه‌ها را بدست آورید؟



الف) $y = x^2 + 6x + 5$

ب) $y = x^2 + 4x - 5$

تابع درجه دو (سهمی)

با توجه به علامت a ، سهمی دو تا شکل می تواند داشته باشد:

بُرد	مقدار \max یا \min	مماس افقی	محور تقارن	عرض رأس	طول رأس	قیافه
$[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$	$\min = \frac{-\Delta}{4a}$	$y = \frac{-\Delta}{4a}$	$x = \frac{-b}{2a}$	$f(\frac{-b}{2a})$ یا $\frac{-\Delta}{4a}$	$\frac{-b}{2a}$	
$(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$	$\max = \frac{-\Delta}{4a}$					

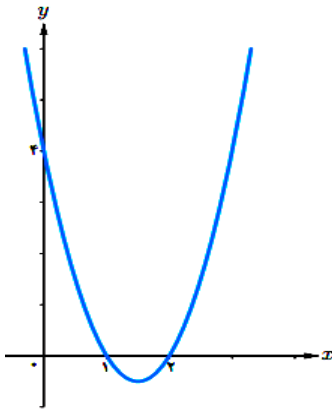
سوال ۱۳: تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

- تنها نقطه ای از سهمی که با حذف آن، برد تغییر می کند، رأس سهمی است.
- اگر دو نقطه با لایهای یکسان روی سهمی داشته باشیم، میانگین x هایشان، رأس را می دهد. از این جمله می توانیم نتیجه بگیریم، میانگین ریشه های سهمی، x رأس است.
- منظور از صفرهای تابع $f(x)$ ، «طول نقاط برخورد تابع f با محور x ها» یا «جوابهای معادله $f(x) = 0$ » است.
- نوشتن سریع معادله سهمی:

چیزهایی که داریم.	ضابطه سهمی	نکته تکمیلی
x_1 و x_2 صفرهای سهمی اند.	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	برای محاسبه a ، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می دهیم.
نقطه (x_S, y_S) رأس سهمی است.	$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	برای محاسبه a ، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می دهیم.
سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله - سه مجهول، ضرایب را پیدا می کنیم.	اگر نقطه ای به مختصات $(c, 0)$ داشتیم، از آن شروع می کنیم.



اگر سهمی در نقطه $(\alpha, 0)$ بر محور X مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y = a(x - \alpha)^2$

• علامت ضرایب a, b و c

علامت c	علامت b	علامت a
عرض نقطه برخورد سهمی با محور yها	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	با دهانه سهمی

«کلاس درس»



سوال ۱۵: قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

معادلات گویا و گنگ

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 زمان نفر اول زمان نفر دوم زمان هر دو نفر با هم

- بعد از حل معادله گویا، حتماً چک کنید که جواب های به دست آمده، ریشه های مخرج نباشند.
- اگر شخص اول کاری را به تنهایی در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم در C ساعت انجام دهند، رابطه روبهرو بین A، B و C برقرار است:

سوال ۱۶: معادله های مقابل را حل کنید.



الف) $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$

ب) $\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$

یه عدد \pm یه عدد $\Rightarrow \frac{x_1}{v_1} \pm \frac{x_2}{v_2} = \text{یه عدد}$
سوال می ده

- اگر وسیله ای مسیری به طول X را با سرعت ۷۱ برود و با سرعت ۷۲ برگردد، با توجه به رابطه $t = \frac{X}{v}$ ، داریم:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

- بعد از حل معادله گنگ، جواب های به دست آمده را در معادله اولیه چک کنید.
- اگر جمع چند رادیکال صفر شد، عبارت داخل تک تک آن ها صفر است:

- بعضی از معادلات گنگ نیاز به حل ندارند. مثلاً $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} = x$ ، چون دامنه ها به ترتیب $x \geq 3$ و $x \leq 1$ است که اشتراکشان تهی می شود.

«تکمیل در کلاسه»



سوال ۱۷: معادلات زیر را حل کنید؟



الف) $\sqrt{x+2} + 4 = x$

ب) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

پ) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$

ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

سوال vip: معادله خط گذرنده از نقطه $(-2, 3)$ و نقطه تلاقی (برخورد) دو خط به معادلات $x+2y=7$ و $4x-y=1$ را بنویسید؟؟

سوال vip: فاصله نقطه $(3, 4)$ از خط $x+3y=a$ برابر $\frac{3}{\sqrt{10}}$ است. مقدار a کدام است؟

سوال vip: دایره ای به مرکز $(2, -1)$ و به مساحت 9π برخط $4y-3x=k$ مماس است. مقدار k کدام می تواند باشد؟

سوال vip: ریشه معادله $-2x^6 + 11x^3 + 40 = 0$ را بدست آورید؟

سوال vip: در معادله درجه دوم $x^2 + (m + 3)x - 7 + m = 0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌ها برابر ۴

باشد؟

سوال vip: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta + \beta^3\alpha$ را بدست آورید؟

سوال vip: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟

سوال vip: فوتبالیستی توپی را با زاویه ۴۵ درجه نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه ۲۰ متر بر ثانیه شوت می‌کند. معادله مسیر حرکت این توپ یک تابع درجه دو با ضابطه $y = \frac{-1}{4}x^2 + x$ است که در آن x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ است. الف) حداکثر مسافت طی شده توسط توپ چقدر است؟

ب) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید؟

سوال vip: سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

سوال vip: مجموع و حاصل ضرب جواب های معادله $(x + 1)^2 = 2\sqrt{x^2 + 2x} + 2$ کدام است؟